2014年1月14日
第14回

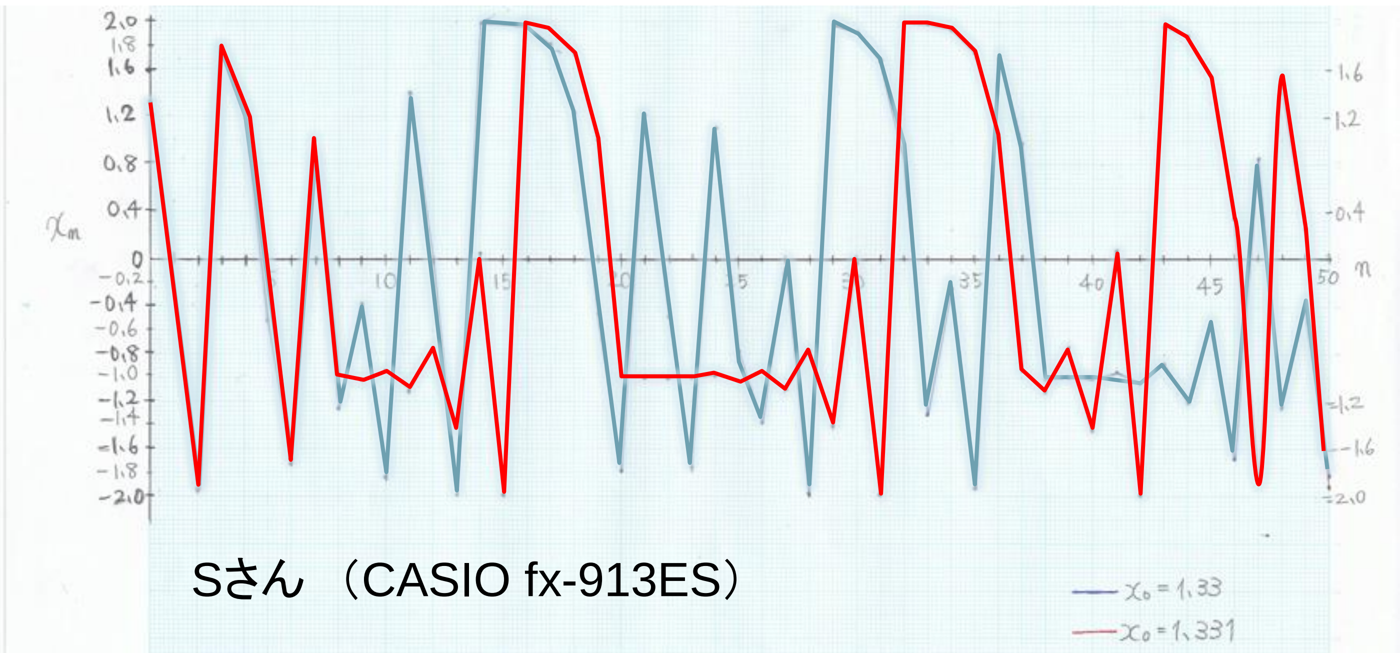
大気環境シミュレーション

実験結果の例

- 初期値がわずかに違う2つの計算結果が大きく異なる挙動を示す
- 初期のわずかな誤差(0.001)が増幅

$x_0 = 1.33$

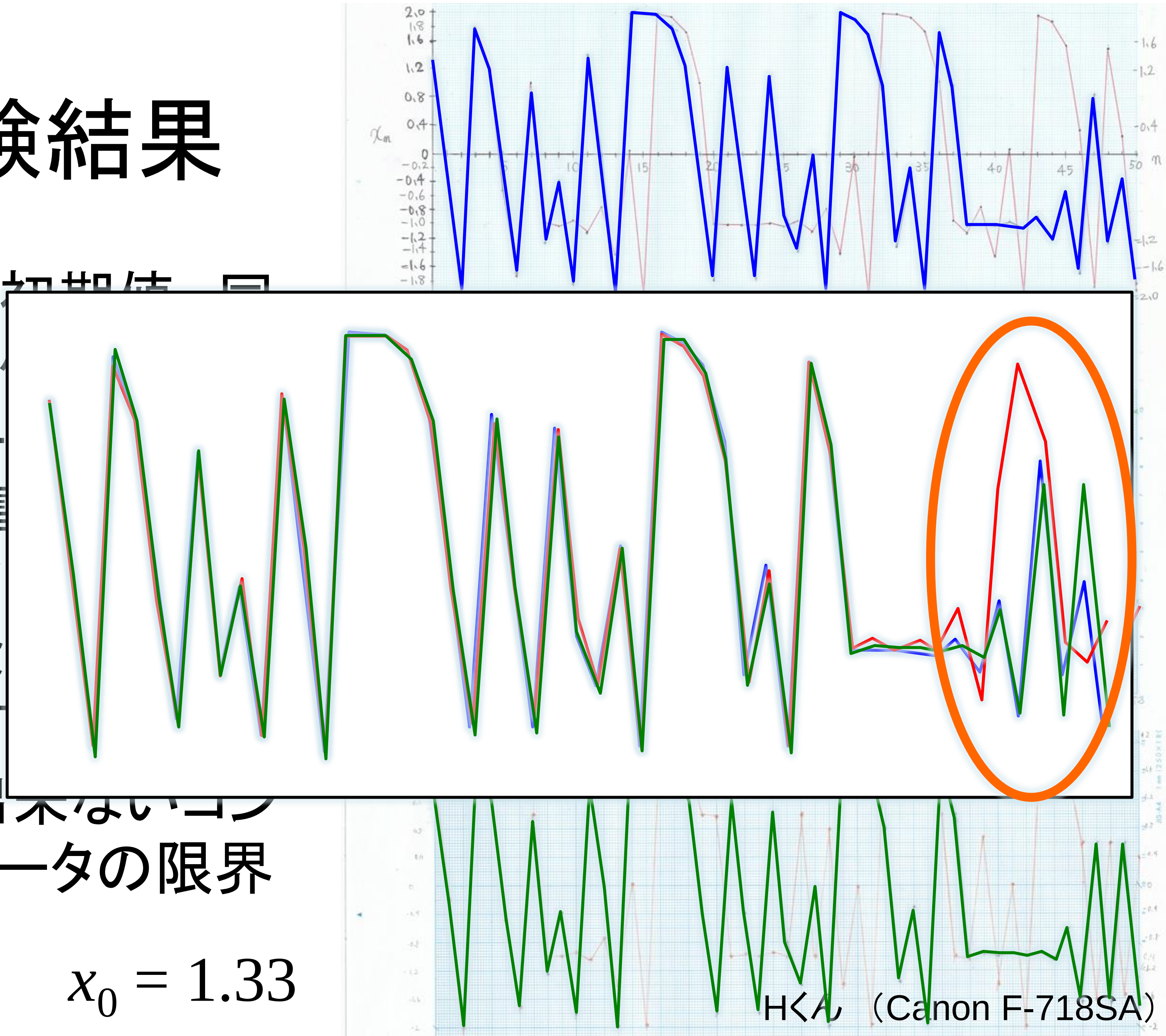
$x_0 = 1.331$



実験結果

- 同じ初期値、同
  じ数
  キー
  も、
  ただ
  異な
  →有
  か出来ないコン
  ピュータの限界

$$x_0 = 1.33$$



安定性ーノイマン法

- 差分点（$x_j = j\Delta x,\ t_n = n\Delta t$）における f の値 f_j^n を

$$f_j^n = A^n \exp(i\,k\,j\,\Delta x)$$

とおき、$\lambda = A^{n+1} / A^n$ の大きさを求めて以下のように判別する

$$|\lambda| = \begin{cases} \leq 1 & \cdots \text{安定} \\ > 1 & \cdots \text{不安定} \end{cases}$$

全ての k について安定なら、無条件安定

- $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ （λ_r, λ_iは実数）
- $|\lambda|$:

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda_r{}^2 + \lambda_i{}^2}$$

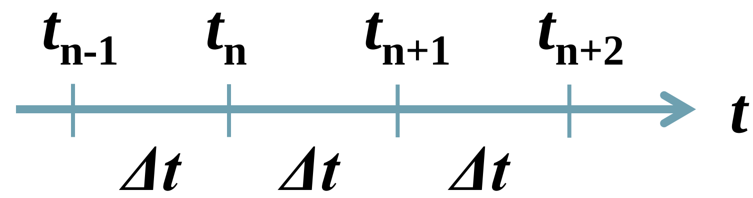
- これから講義するのは:

・移流スキーム:リープフロッグ＋中央差分

・拡散スキーム:リープフロッグ

＋過去値を用いた中央差分

時間発展



$$(f^{n+1} - f^{n})/\Delta t = g(f^{n}) \quad (1)$$

$$(f^{n+1} - f^{n})/\Delta t = g(f^{n+1}) \quad (2)$$

$$(f^{n+1} - f^{n-1})/(2\Delta t) = g(f^{n}) \quad (3)$$

(1) 陽解法（explicit scheme）

nステップの値からn+1ステップの値が直ちに求まる。
解は必ずしも安定ではない

(2) 陰解法（implicit scheme）

n+1ステップの計算は複雑。解は安定

(3) リープ･フロッグ法（leap-frog scheme）

n-1、nステップの値が必要。解は中立

(1) 線形移流方程式の差分近似

復習

- 線形移流方程式

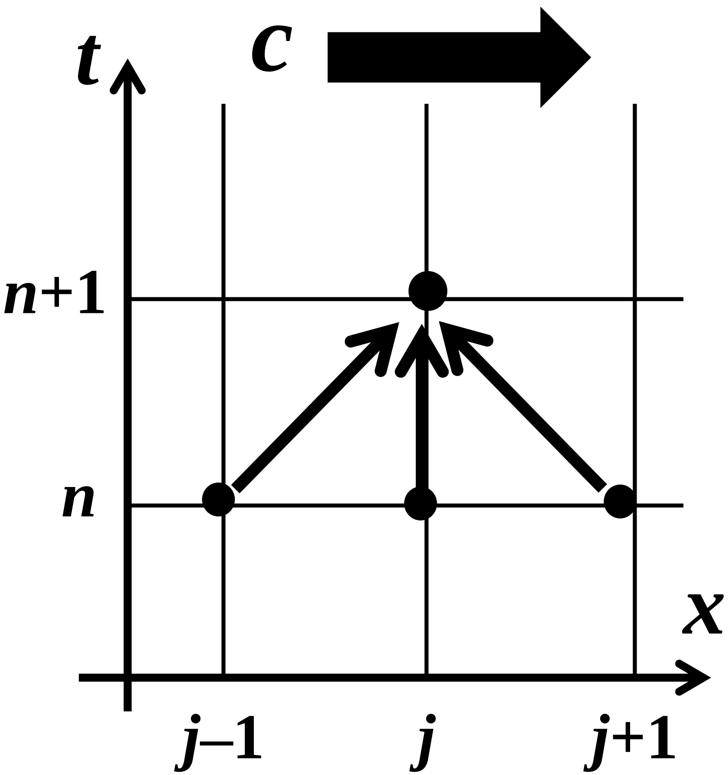
$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

を**陽解法**と**中心差分**で差分近似すると、

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + c\frac{-f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2\Delta x} = 0$$

整理すると、

$$f_j^{n+1} = \frac{c\Delta t}{2\Delta x} f_{j-1}^n + f_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} f_{j+1}^n$$



⇒無条件不安定

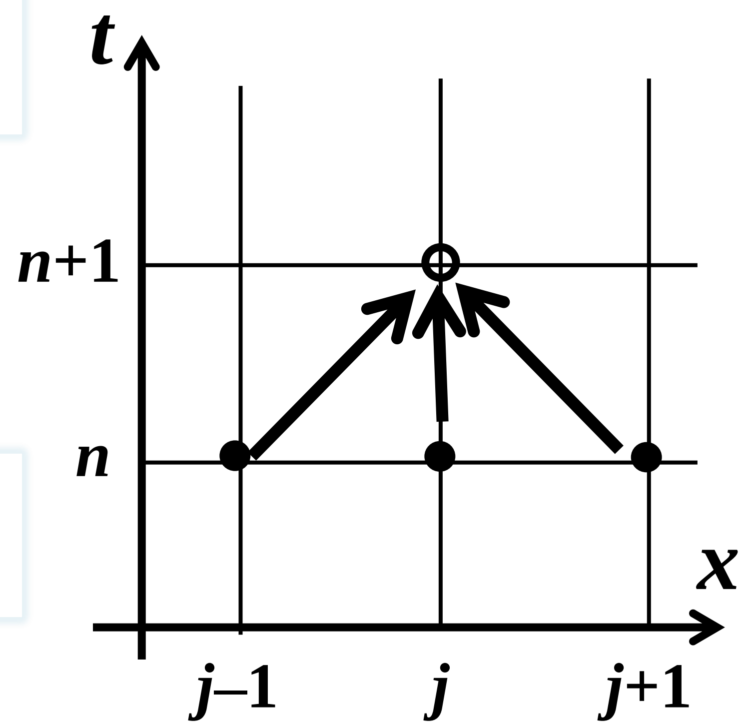
（2）拡散方程式の差分近似（復習）

- **拡散方程式**

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

を**陽解法**と**中心差分**で差分近似すると、

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = a\frac{f_{j-1}^n - 2f_j^n + f_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$



整理すると、

$$f_j^{n+1} = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} f_{j-1}^n + \left(1 - \frac{2a\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) f_j^n + \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} f_{j+1}^n$$

⇒条件付安定

(3) 移流方程式の安定性

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial x}$$

- リープフロッグ法、中心差分での移流方程式の差分形式

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t} = -c\frac{f_{j+1}^{n} - f_{j-1}^{n}}{2\Delta x}$$

についての波数 k の振幅の式は

$$\frac{A^{n+1} - A^{n-1}}{2\Delta t} = -ic\frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x}A^n$$

$$\lambda^2 + i\frac{2c\Delta t}{\Delta x}\sin(k\Delta x)\lambda - 1 = 0$$

(3) 移流方程式の安定性

- 振幅の大きさλは

$$\lambda = -i\frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin(k\Delta x) \pm \sqrt{1-\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x)}$$

$$\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)\sin(k\Delta x) \quad \begin{array}{ll} <1 & neutral \\ =1 & neutral \\ >1 & unstable \end{array}$$

となり、従って、リープフロッグ法、中心差分による移流方程式の差分解法は、条件付安定である

（3）移流方程式の安定性

リープフロッグ法、中心差分による移流方程式の差分解法の安定条件：

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$$

クーラン数： $C = c\Delta t / \Delta x$

→ 情報伝達距離（$c\Delta t$）と格子幅（Δx）の比。

一般に、$C \leq 1$ は計算安定性の必要条件。これは $\Delta x / \Delta t \geq c$ であり、「情報が伝播する速さ」が「実際の現象の進む速さ」以上でなければならないことを示す。この条件をCFL（Courant-Friedrichs-Lewy）条件という

（4） 拡散方程式の安定性

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- 拡散方程式の差分形式:
- リープフロッグ法、
- 現在値の拡散

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t} = a\frac{f_{j-1}^{n} - 2f_j^{n} + f_{j+1}^{n}}{(\Delta x)^2}$$

についてフーリエ変換を適用し、安定性を調べる。

波数 k の振幅の式は

$$\frac{A^{n+1} - A^{n-1}}{2\Delta t} = 2a\frac{\cos(k\Delta x) - 1}{(\Delta x)^2}A^n$$

$$\lambda^2 + \frac{8a\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k\Delta x}{2}\lambda - 1 = 0$$

$$\because \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\lambda = -\frac{4a\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k\Delta x}{2} \pm \sqrt{\left\{\frac{4a\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k\Delta x}{2}\right\}+1}$$

$$\sin^2\frac{k\Delta x}{2} \to 1$$

$$|\lambda| = \frac{4a\Delta t}{(\Delta x)^2} + \sqrt{\left\{\frac{4a\Delta t}{(\Delta x)^2}\right\}+1} > 1$$

拡散スキームとして、リープフロッグに現在値を使うのは、数値的に不安定である。

（5） 拡散方程式の安定性

拡散項には**過去値**をもちいる

$$\frac{A^{n+1}-A^{n-1}}{2\Delta t}=2a\frac{\cos(k\Delta x)-1}{(\Delta x)^2}A^{n-1}$$

$$\lambda^2-1+\frac{8a\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k\Delta x}{2}=0\Rightarrow\lambda=\pm\sqrt{1-\frac{8a\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k\Delta x}{2}}$$

$$\sqrt{1-\frac{8a\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k\Delta x}{2}}<1$$

$$\boxed{\frac{8a\Delta t}{(\Delta x)^2}<1}$$

$$\Delta t = 0.1,\ \Delta x = 0.1$$

$$a<\frac{0.1}{8}=0.0125$$

$a = 0.01$ の値であれば拡散項に関しては安定である

まとめ

$$\frac{\partial f}{\partial t}+c\frac{\partial f}{\partial x}-a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$$

・時間：　陽解法か、リープフロッグ法か

・移流項：陽解法＋中央差分⇒無条件不安定

リープフロッグ法＋中央差分⇒CFL条件を満たす条件付き安定

・拡散項：リープフロッグ法＋現在値⇒無条件不安定

リープフロッグ法＋過去値⇒条件付き安定

$$\frac{f_j^{n+1}-f_j^{n-1}}{2\Delta t}+c\frac{-f_{j-1}^{n}+f_{j+1}^{n}}{2\Delta x}-a\frac{f_{j+1}^{n-1}-2f_j^{n-1}+f_{j-1}^{n-1}}{(\Delta x)^2}=0$$

$$f_j^{n+1}=f_j^{n-1}-c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{j+1}^{n}-f_{j-1}^{n}\right)+a\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(f_{j+1}^{n-1}-2f_j^{n-1}+f_{j-1}^{n-1}\right)$$

$$f_j^{n+1} = f_j^{n-1} - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{j+1}^{n} - f_{j-1}^{n}\right) + a\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(f_{j+1}^{n-1} - 2f_j^{n-1} + f_{j-1}^{n-1}\right)$$

$$\Delta t = 0.1,\ \Delta x = 0.1$$

$$c = 0.3\ or\ 0.2$$

$$a = 0.01\ or\ 0.005$$

1次元線形移流拡散式_プログラム作成（2)

のエクセル参照

$$f_j^{n+1} = f_j^{n-1} - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{j+1}^{n} - f_{j-1}^{n}\right) + a\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(f_{j+1}^{n-1} - 2f_j^{n-1} + f_{j-1}^{n-1}\right)$$

(1) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, c = 0.2, a = 0.01$ （○）

(2) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 1.0, c = 0.2, a = 0.01$ （×）

(3) $\Delta t = 1.0, \Delta x = 0.1, c = 0.2, a = 0.01$ （×）

(4) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, c = 0.8, a = 0.01$ （○）

(5) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, c = 1.5, a = 0.01$ （×）

(6) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, c = f_j^n, a = 0.01$ （Δ）

宿題: (1)から(6)までの（x、t、振幅）の図を描け
2014年1月20日（月） 午後5時まで
3417室