

第13回

大気環境シミュレーション

(Q1)

各自excelを用いて、次の漸化式

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2$$

の解の初期値依存性を調べよ. nは50まで。

(1) $x_0 = 2.10$

(2) $x_0 = 2.15$

(3) $x_0 = 2.20$

締切 2014年1月6日(月)夕方まで
提出先 3417室



オーバーフロー

失敗

ゴメンなさい

(Q1) ‘

各自excelを用いて、次の漸化式

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2$$

の解の初期値依存性を調べよ. nは50まで。

(1) $x_0=1.330$

(2) $x_0=1.331$

(3) $x_0=1.332$

(4) $x_0=1.333$

締切 2014年1月14日(火)第1時限まで

提出先 3417室

今回と次回にわたって、次の式を
計算してもらう

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} - a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

を差分式にしてみる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial x} + a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

時間項 = 移流項 + 拡散項

時間項 : リープフロッグ
空間差分: 中央差分

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{-f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2\Delta x} - a \frac{f_{j+1}^{n-1} - 2f_j^{n-1} + f_{j-1}^{n-1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$f_j^{n+1} = f_j^{n-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + a \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} (f_{j+1}^{n-1} - 2f_j^{n-1} + f_{j-1}^{n-1})$$

$$\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1$$

$$c = 0.2$$

$$a = 0.005$$

どうしてこのような数値を選ぶのか理解する

1次元線形移流拡散式 プログラム作成(2)

$$f_j^{n+1} = f_j^{n-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + a \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} (f_{j+1}^{n-1} - 2f_j^{n-1} + f_{j-1}^{n-1})$$

(1) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, c = 0.2, a = 0.01$ (○)

(2) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 1.0, c = 0.2, a = 0.01$ (×)

(3) $\Delta t = 1.0, \Delta x = 0.1, c = 0.2, a = 0.01$ (×)

(4) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, c = 0.8, a = 0.01$ (○)

(5) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, c = 1.5, a = 0.01$ (×)

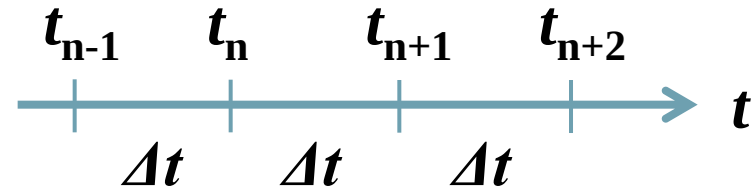
(6) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, c = f_j^n, a = 0.01$ (Δ)

宿題: (1)から(6)までの(x、t、振幅)の図を描け

2014年1月20日(月) 午後5時まで

3417室

時間発展



◎ 時間微分を含む次の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = g(f)$$

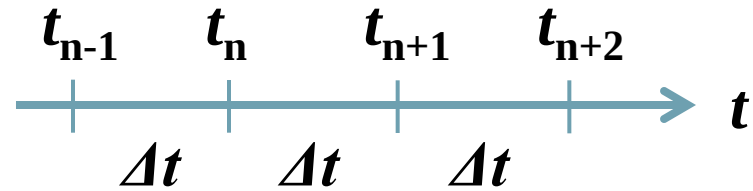
について差分化する。時間間隔を Δt とし、 n ステップ目の値を f^n と書き表すと、以下のような差分式で表せる

$$(f^{n+1} - f^n) / \Delta t = g(f^n) \quad (1)$$

$$(f^{n+1} - f^n) / \Delta t = g(f^{n+1}) \quad (2)$$

$$(f^{n+1} - f^{n-1}) / (2\Delta t) = g(f^n) \quad (3)$$

時間発展



$$(f^{n+1} - f^n) / \Delta t = g(f^n) \quad (1)$$

$$(f^{n+1} - f^n) / \Delta t = g(f^{n+1}) \quad (2)$$

$$(f^{n+1} - f^{n-1}) / (2\Delta t) = g(f^n) \quad (3)$$

(1) 陽解法 (explicit scheme)

nステップの値からn+1ステップの値が直ちに求まる。
解は必ずしも安定ではない

(2) 陰解法 (implicit scheme)

n+1ステップの計算は複雑。解は安定

(3) リープ・フロッグ法 (leap-frog scheme)

n-1、nステップの値が必要。解は中立

線形移流方程式

◎ f についての移流方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

移流項 $u(\partial f / \partial x)$ は非線形のため複雑なので、
ここでは簡単のため、移流速度は $c (\geq 0)$
で一定であるとする。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

移流項は線形化され、解析解が求まる。

線形移流方程式の解

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

において変数 X, T を

$$\begin{cases} X = x - ct \\ T = t \end{cases}$$

のように置くと、

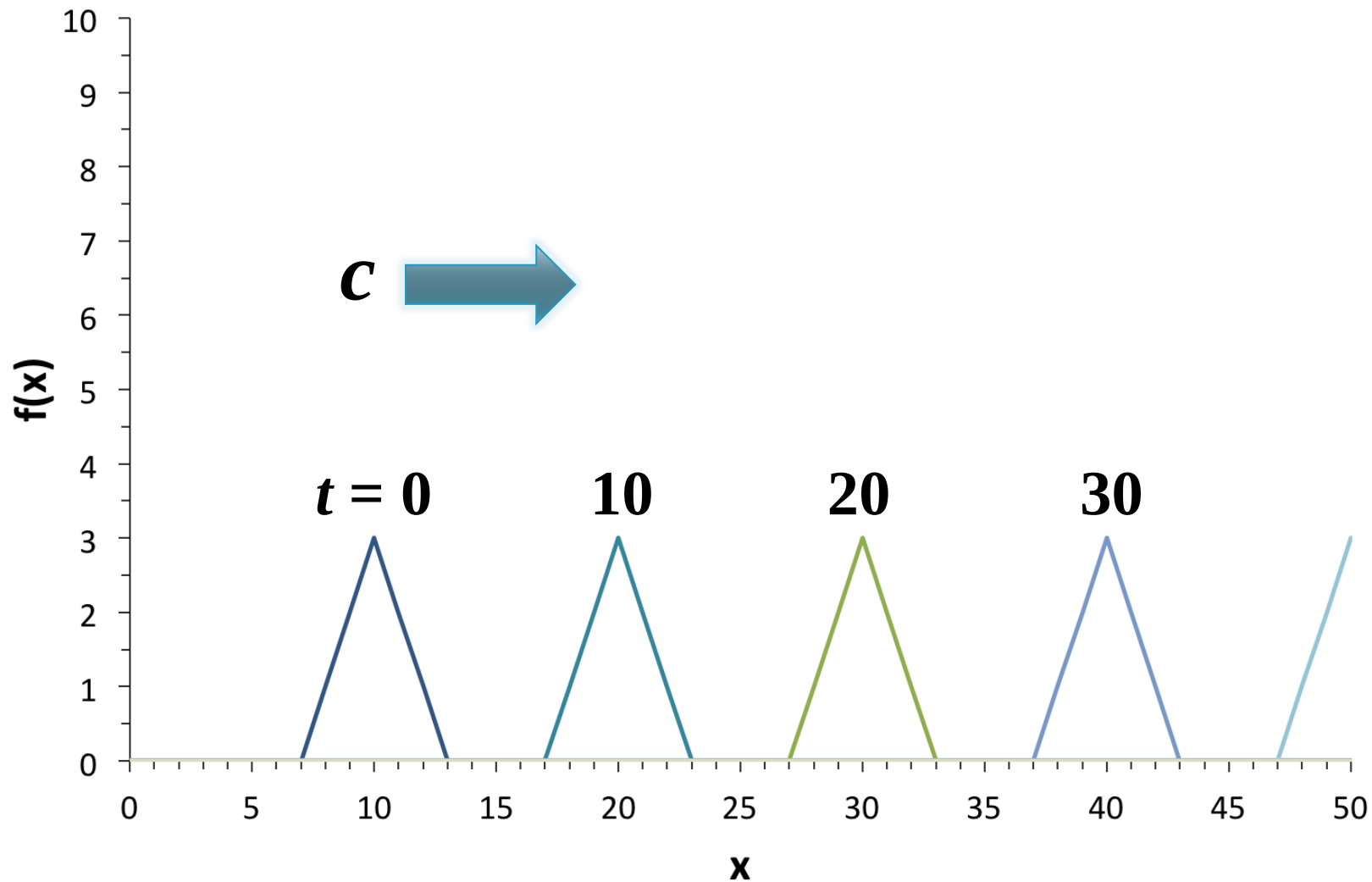
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial T} - c \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \end{cases}$$

◎ これを利用して
線形移流方程式
を書き直すと、

$$\frac{\partial f}{\partial T} = 0$$

→ $t = 0$ における f
の分布を維持し
たまま速さ c で
移動

線形移流方程式の解



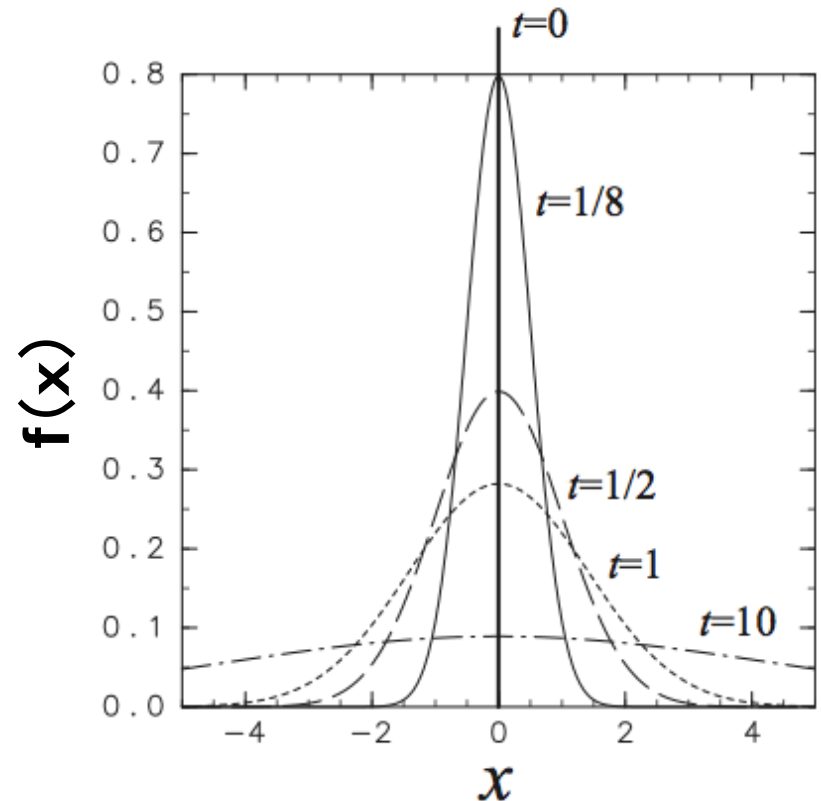
拡散方程式

$a(\geq 0)$ は拡散係数で定数とする

● 拡散方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- 拡散方程式の解は、上に凸 ($\partial^2 f / \partial x^2 < 0$) のところで減少 ($\partial f / \partial t < 0$) し、下に凸 ($\partial^2 f / \partial x^2 > 0$) のところで増加 ($\partial f / \partial t > 0$) するので、分布を平滑化させる解となる



拡散方程式の厳密解

$a(\geq 0)$ は拡散係数で定数とする

問題: x 方向には周期的と仮定する

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f(x, t) = H(t) \sin kx$$

$$H(0) = 1 \quad \text{at} \quad t = 0$$

解: $\frac{dH}{dt} = -ak^2 H \quad b = -ak^2$

$$H = Ae^{-bt} \Rightarrow H = e^{-bt}$$

$$f(x, t) = e^{-bt} \sin kx$$

線形移流拡散方程式の厳密解

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} + a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

において変数 X, T を

$$\begin{cases} X = x - ct \\ T = t \end{cases}$$

のように置くと、

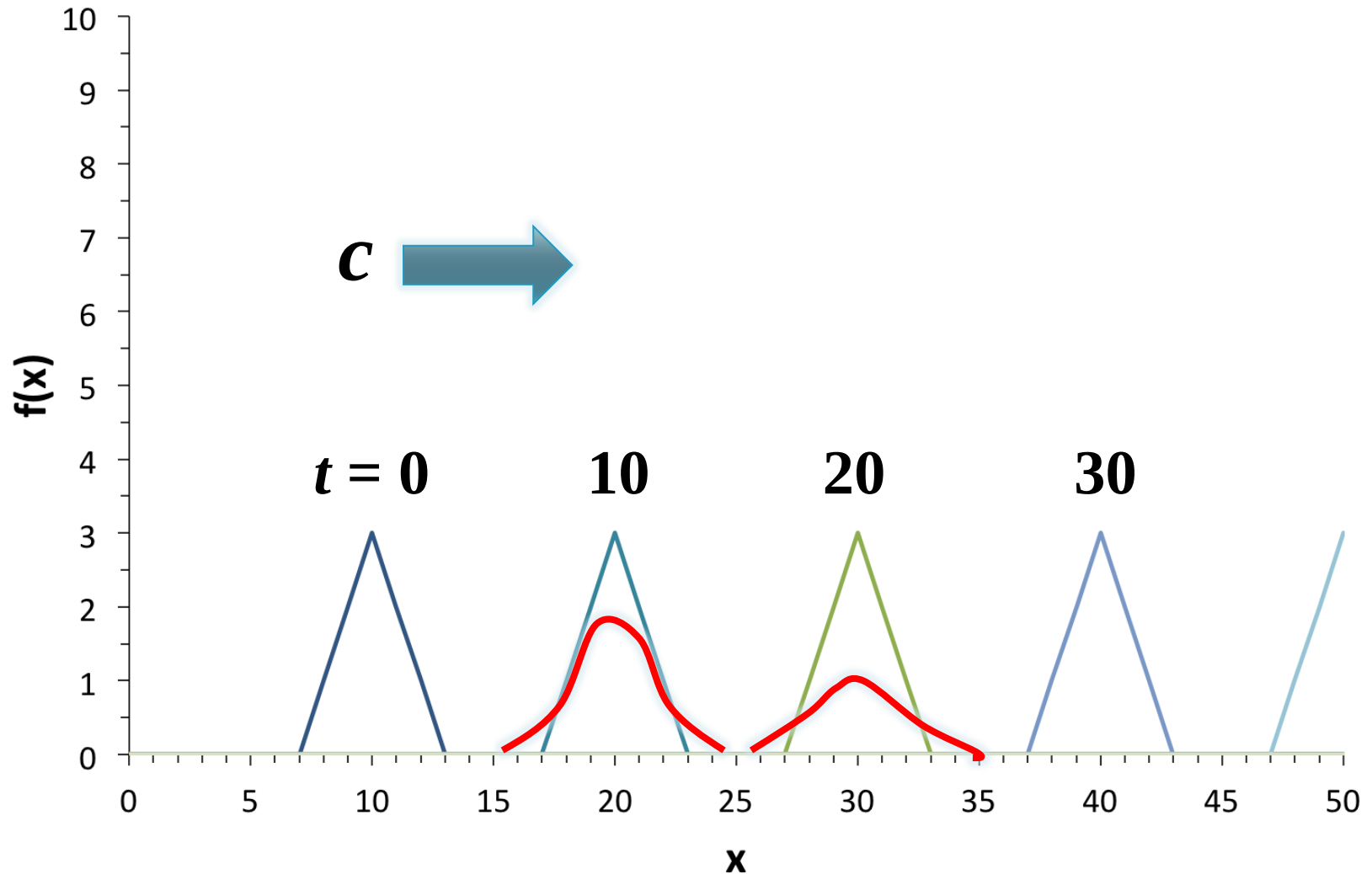
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial T} - c \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \end{cases}$$

◎ これを利用して線形移流拡散方程式を書き直すと、

$$\frac{\partial f}{\partial T} = a \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$$

→ 速さ c で移動しながら拡散するような解

線形移流拡散方程式の解



線形移流方程式の差分近似 (復習)

- 時間微分については、**陽解法**を採用

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}$$

- 空間微分に**中心差分**を用いると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{j-\frac{1}{2}}^n + f_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}$$

- $f_{j\pm 1/2}$ の補間を $f_{j\pm \frac{1}{2}}^n = \frac{f_j^n + f_{j\pm 1}^n}{2}$ とすると、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2\Delta x}$$

線形移流方程式の差分近似

◎ 線形移流方程式

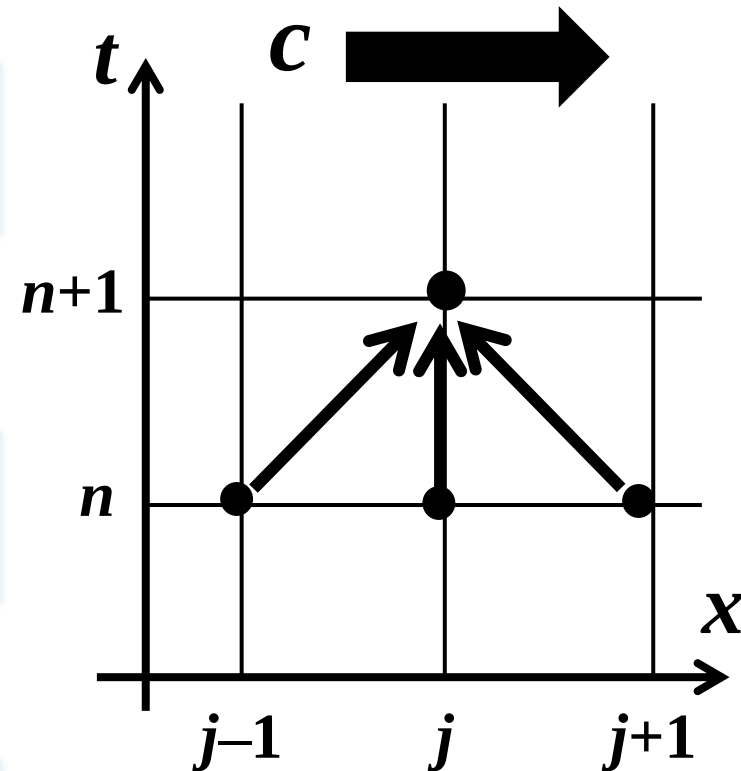
$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

を**中心差分**で差分近似すると、

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + c \frac{-f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2\Delta x} = 0$$

整理すると、

$$f_j^{n+1} = \frac{c\Delta t}{2\Delta x} f_{j-1}^n + f_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} f_{j+1}^n$$



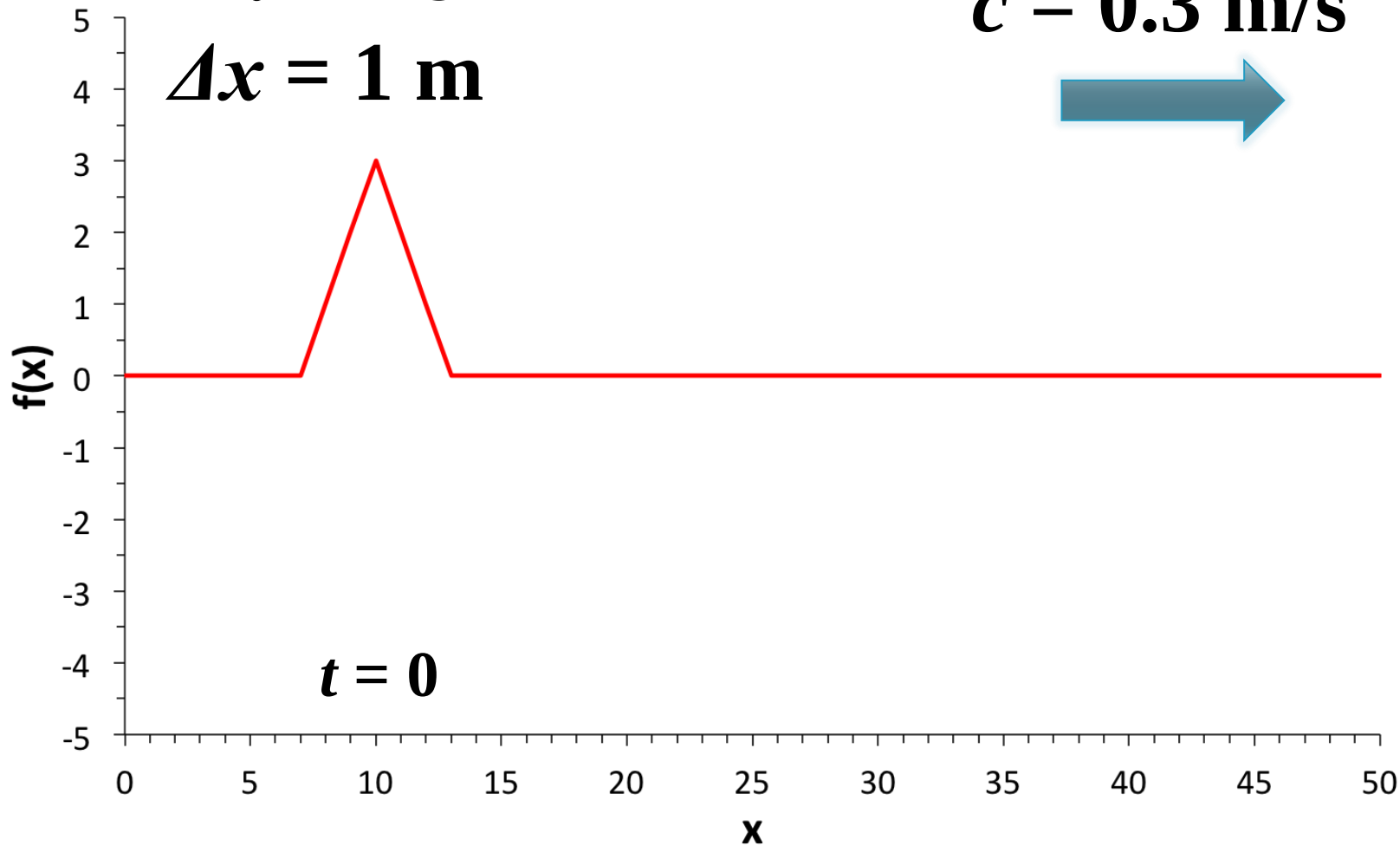
差分解の例(中心差分)

$$\Delta t = 1 \text{ s}$$

中心差分 数値解

$$\Delta x = 1 \text{ m}$$

$$c = 0.3 \text{ m/s}$$



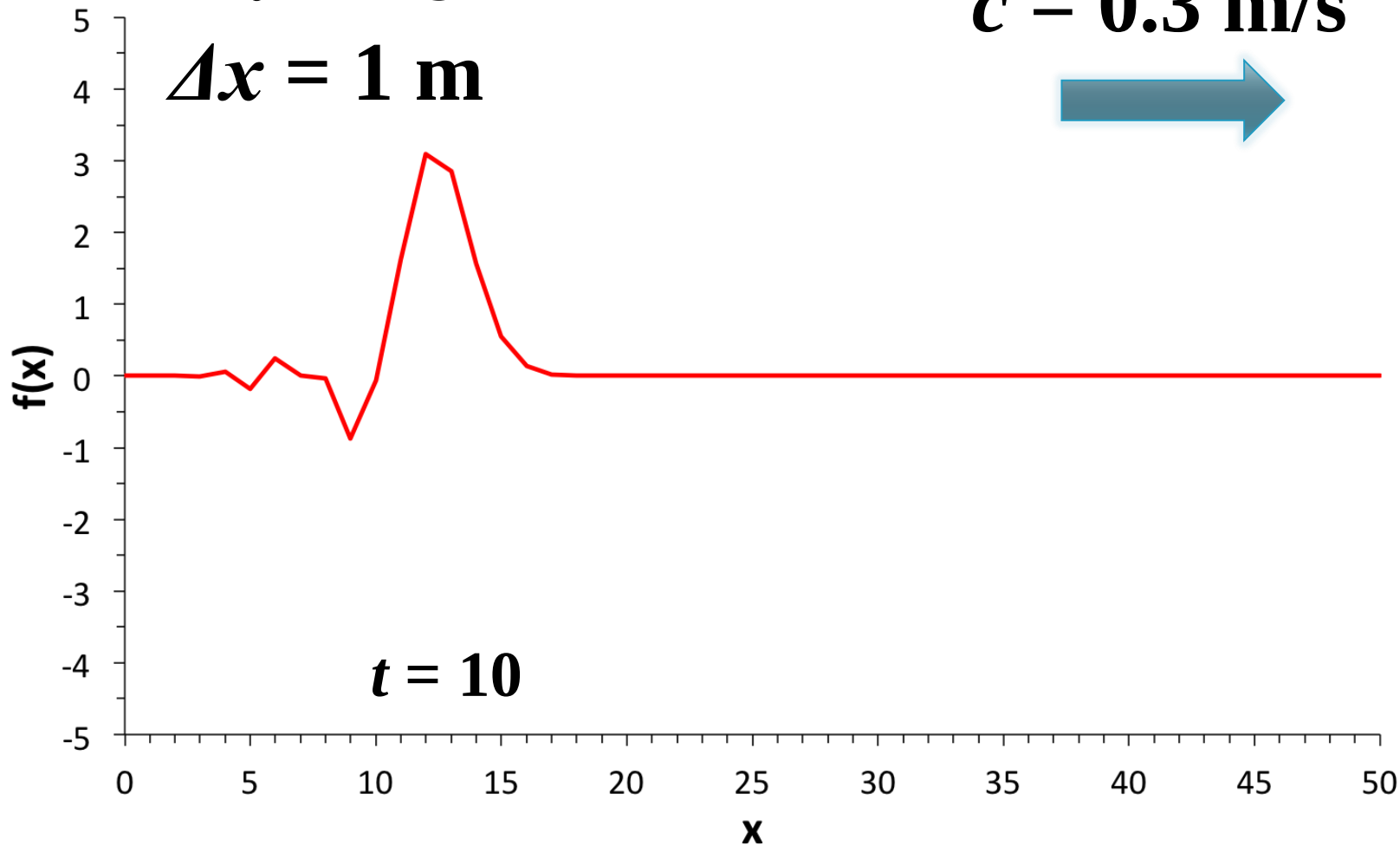
差分解の例(中心差分)

$$\Delta t = 1 \text{ s}$$

中心差分 数値解

$$\Delta x = 1 \text{ m}$$

$$c = 0.3 \text{ m/s}$$



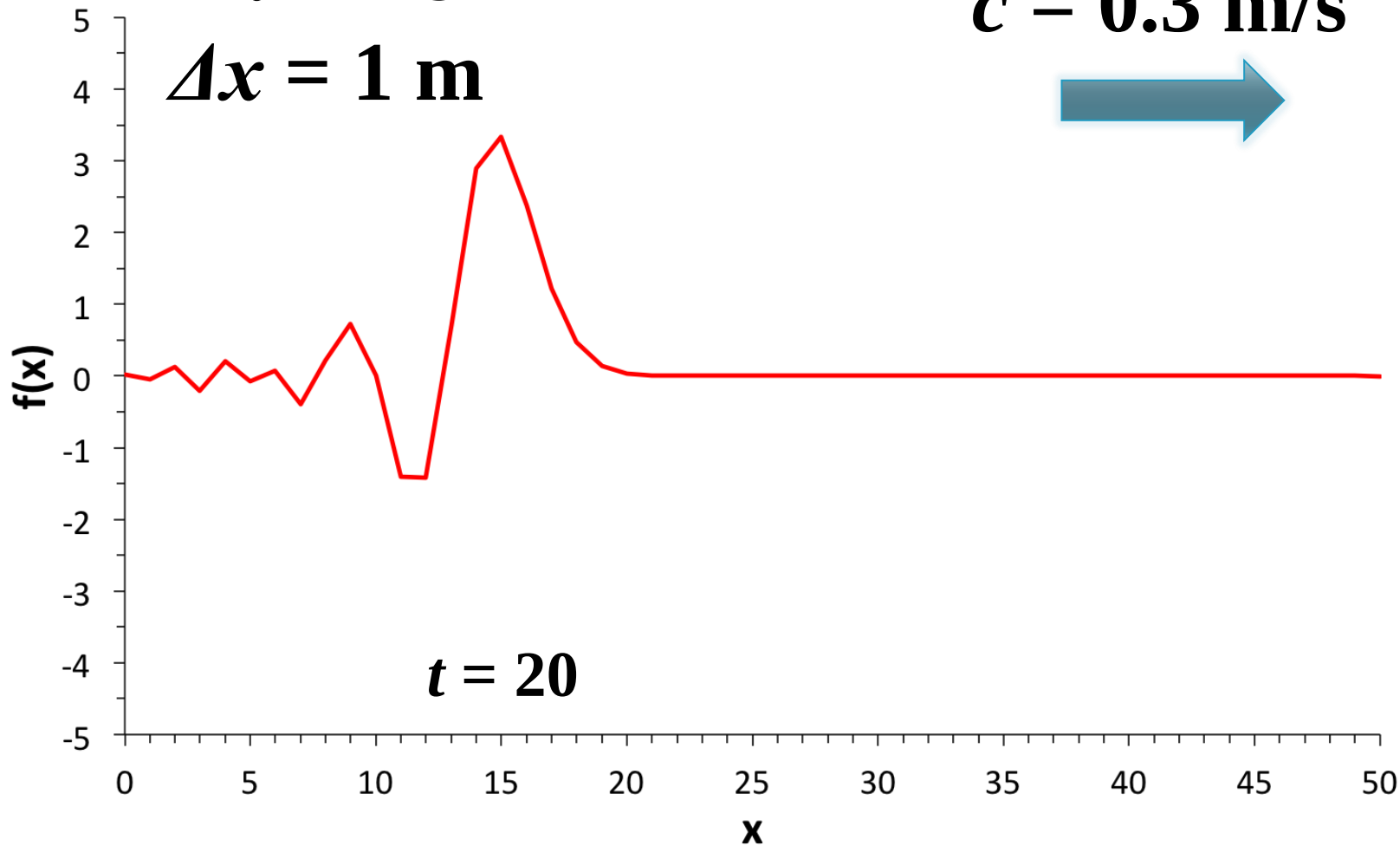
差分解の例(中心差分)

$$\Delta t = 1 \text{ s}$$

中心差分 数値解

$$\Delta x = 1 \text{ m}$$

$$c = 0.3 \text{ m/s}$$



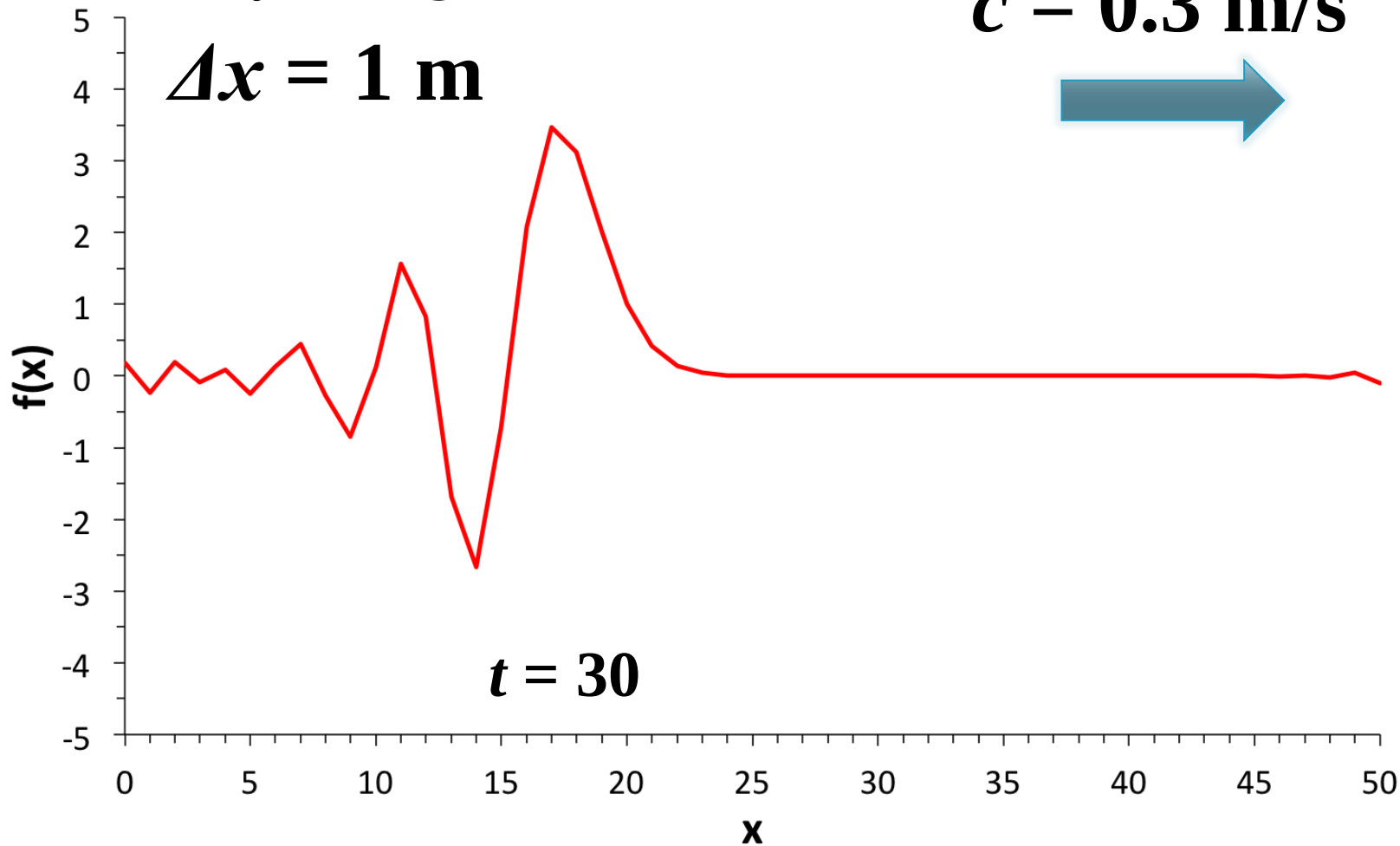
差分解の例(中心差分)

$$\Delta t = 1 \text{ s}$$

中心差分 数値解

$$\Delta x = 1 \text{ m}$$

$$c = 0.3 \text{ m/s}$$



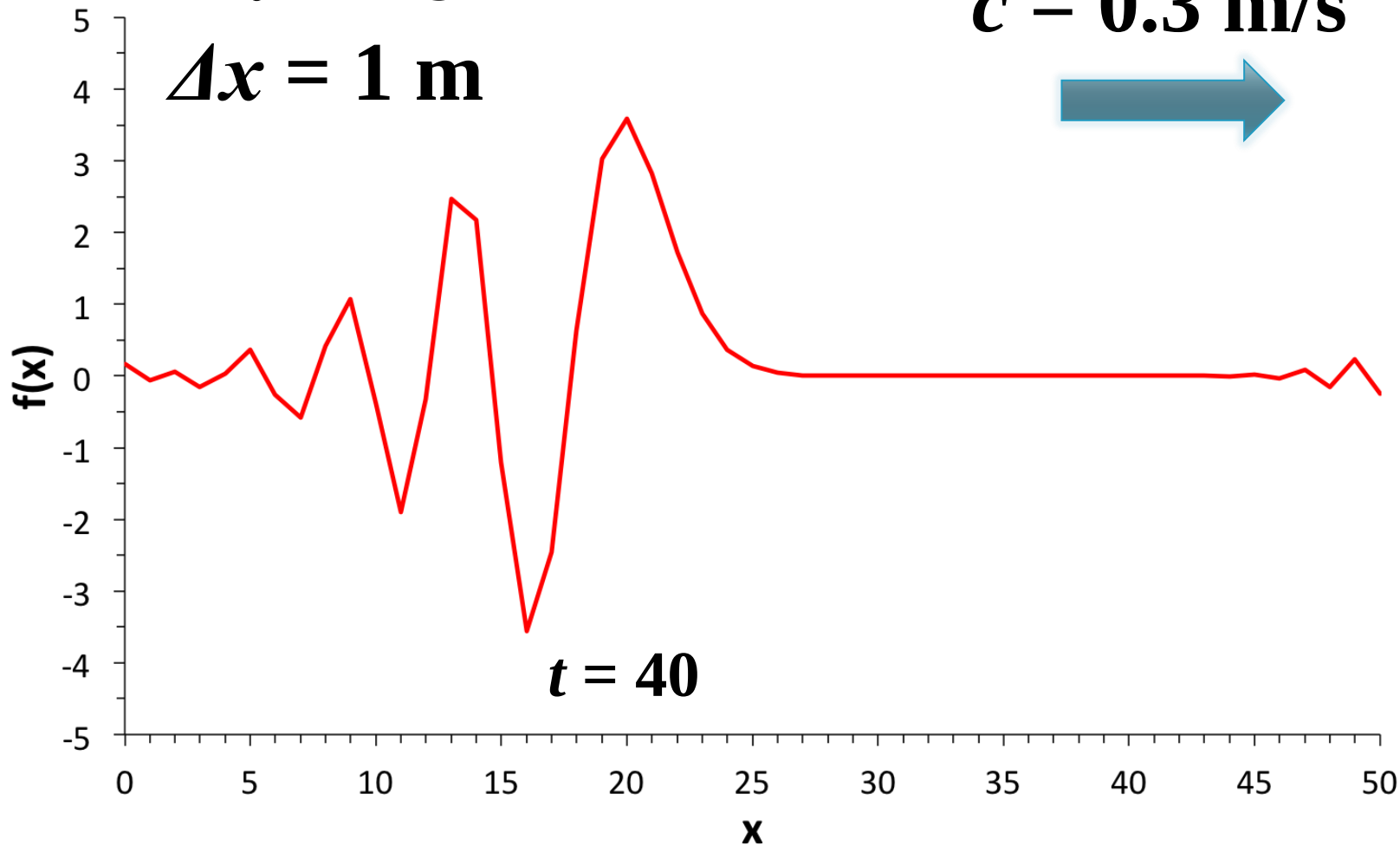
差分解の例(中心差分)

$$\Delta t = 1 \text{ s}$$

中心差分 数値解

$$\Delta x = 1 \text{ m}$$

$$c = 0.3 \text{ m/s}$$



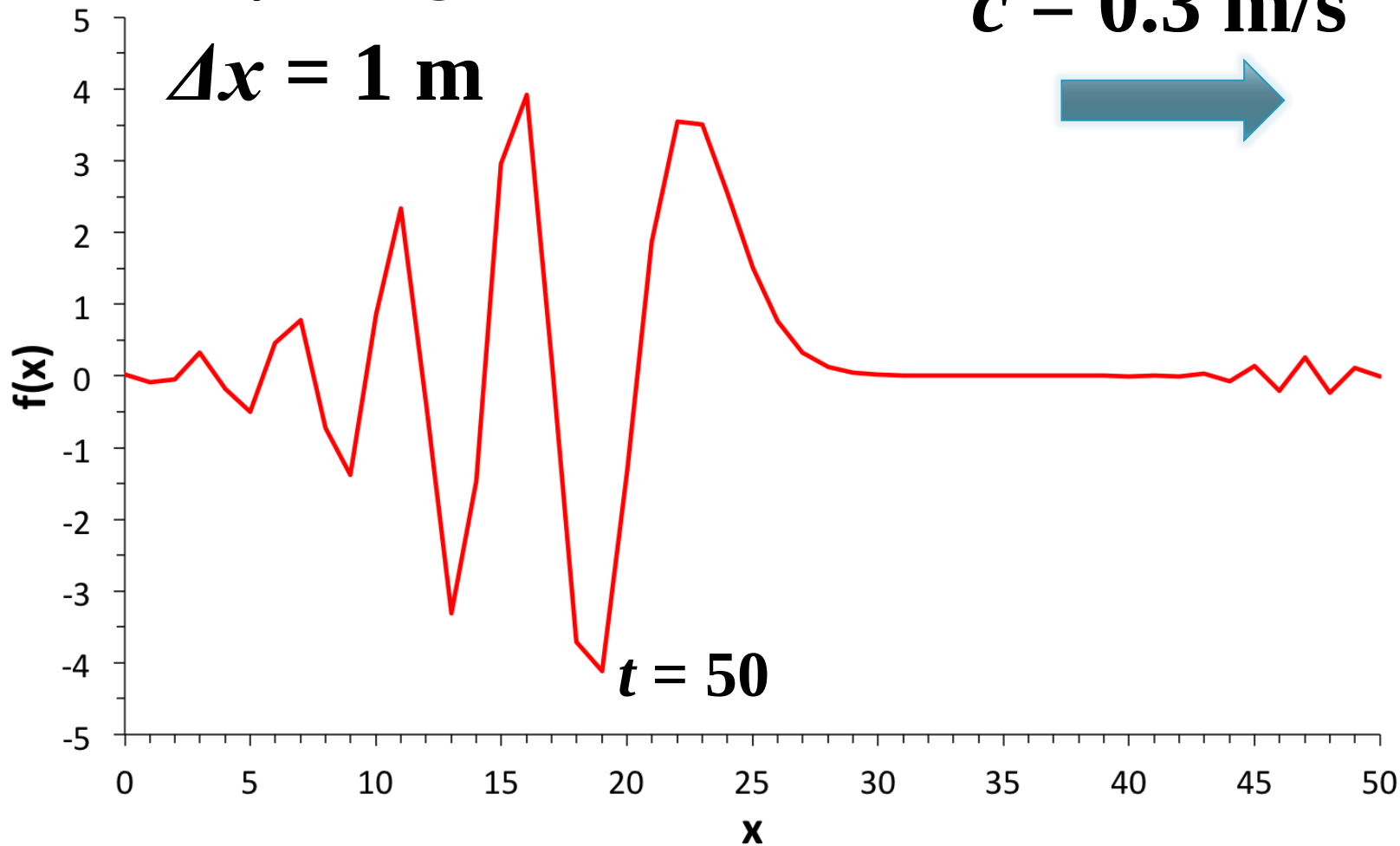
差分解の例(中心差分)

$$\Delta t = 1 \text{ s}$$

中心差分 数値解

$$\Delta x = 1 \text{ m}$$

$$c = 0.3 \text{ m/s}$$



拡散方程式の差分近似(復習)

◎ 拡散方程式

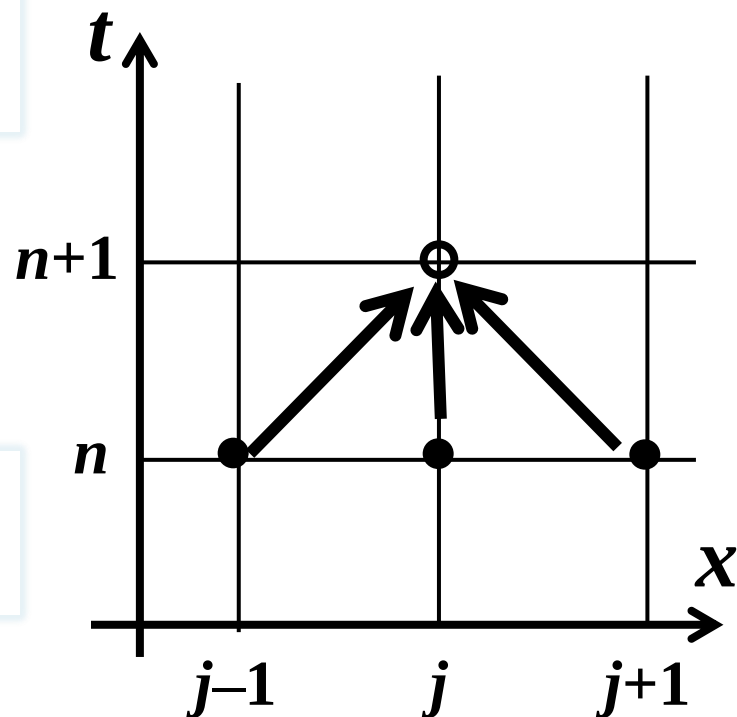
$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

を陽解法と中心差分で
差分近似すると、

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = a \frac{f_{j-1}^n - 2f_j^n + f_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

整理すると、

$$f_j^{n+1} = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} f_{j-1}^n + \left(1 - \frac{2a\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) f_j^n + \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} f_{j+1}^n$$

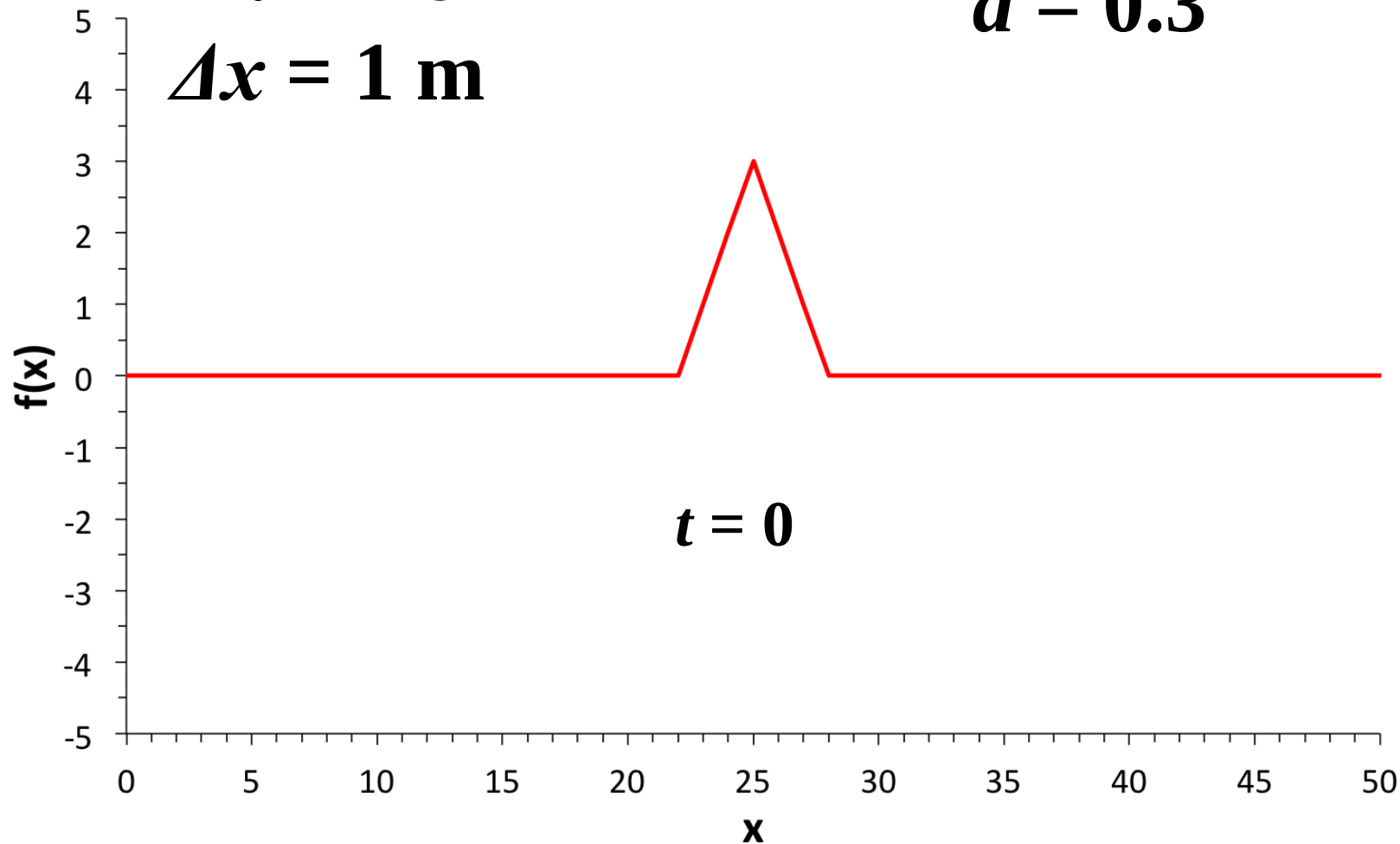


拡散方程式の差分解

$\Delta t = 1$ s 拡散方程式 中心差分 数値解

$a = 0.3$

$\Delta x = 1$ m

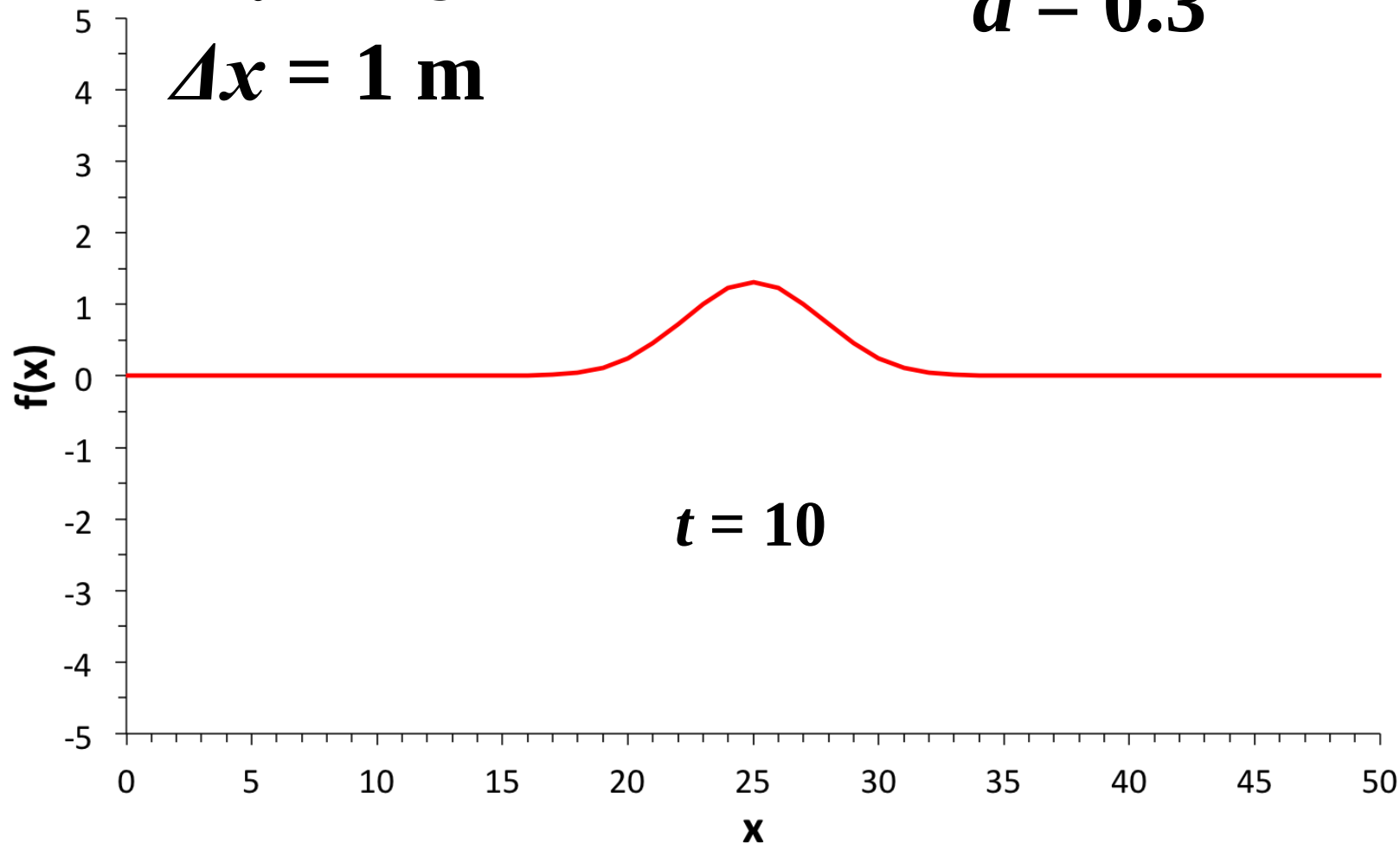


拡散方程式の差分解

$\Delta t = 1$ s 拡散方程式 中心差分 数値解

$a = 0.3$

$\Delta x = 1$ m

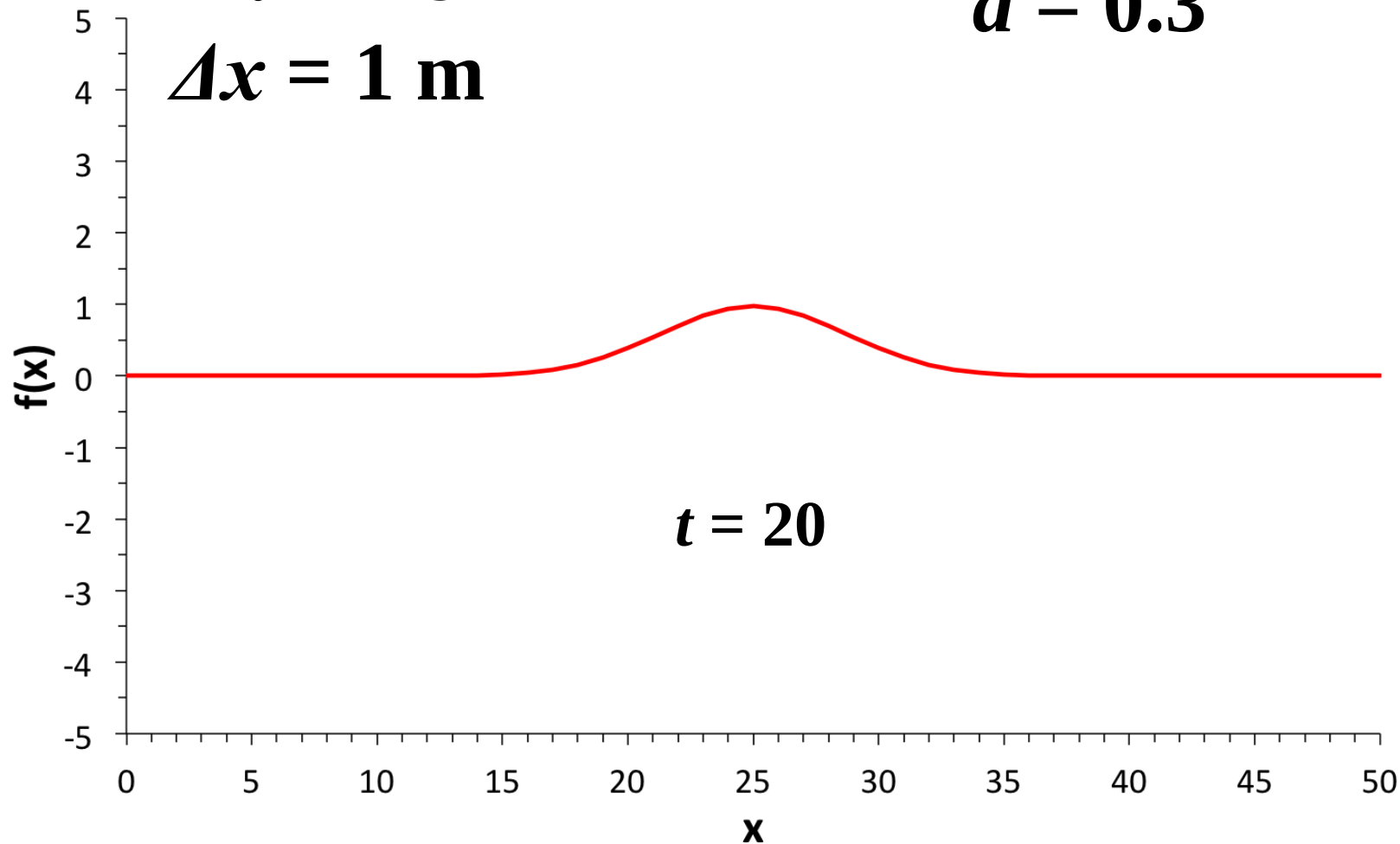


拡散方程式の差分解

$\Delta t = 1$ s 拡散方程式 中心差分 数値解

$a = 0.3$

$\Delta x = 1$ m

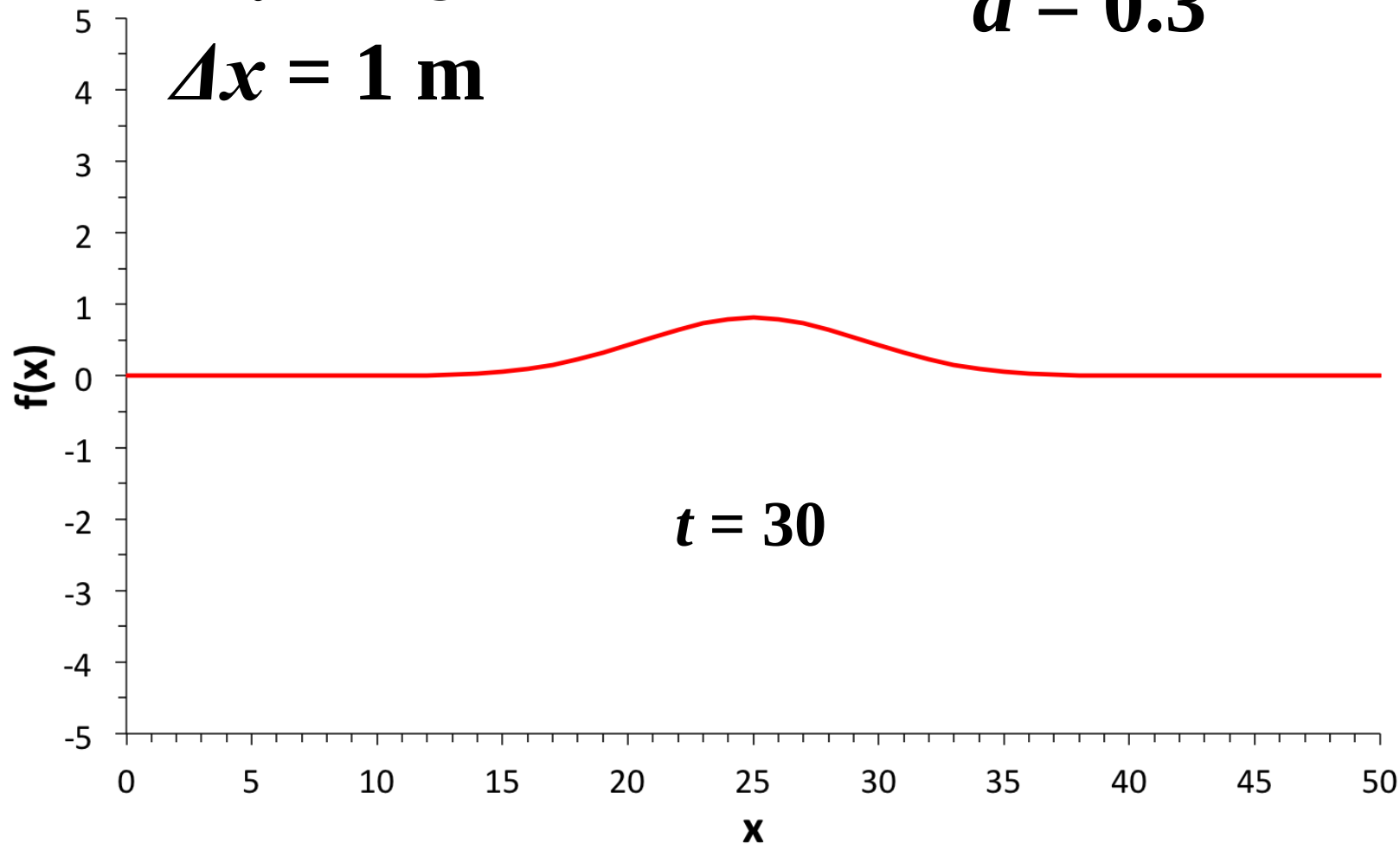


拡散方程式の差分解

$\Delta t = 1$ s 拡散方程式 中心差分 数値解

$a = 0.3$

$\Delta x = 1$ m

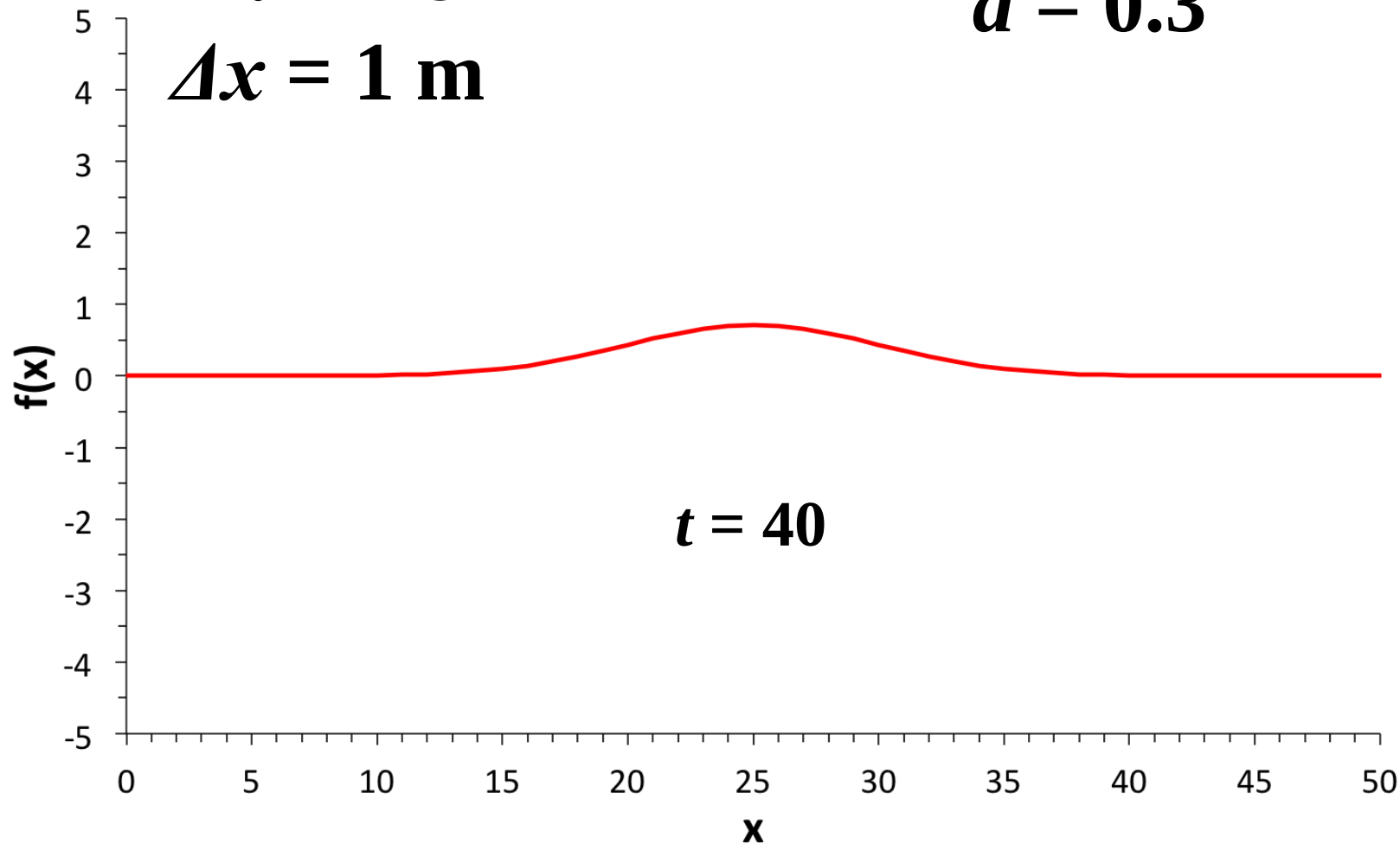


拡散方程式の差分解

$\Delta t = 1$ s 拡散方程式 中心差分 数値解

$a = 0.3$

$\Delta x = 1$ m

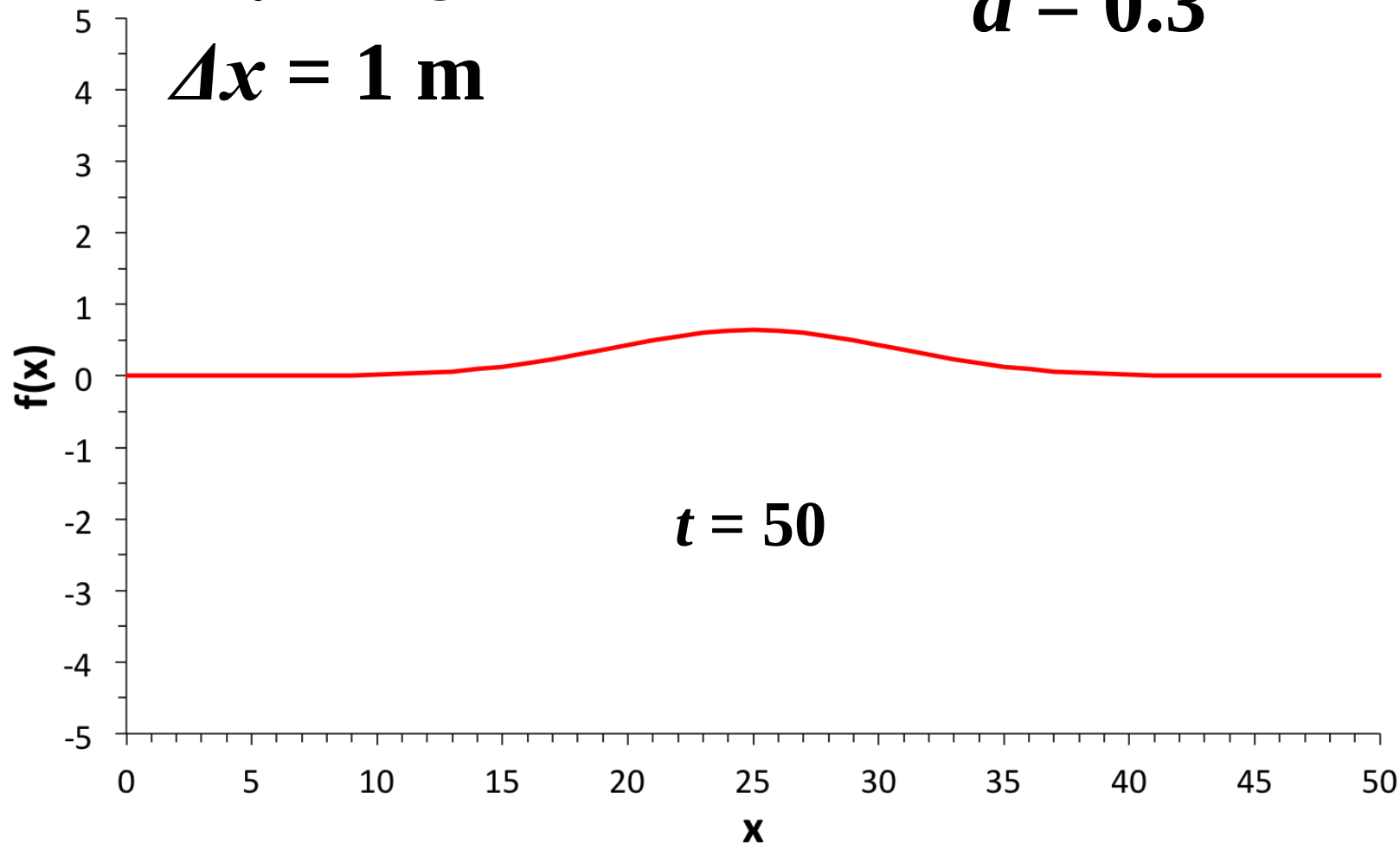


拡散方程式の差分解

$\Delta t = 1$ s 拡散方程式 中心差分 数値解

$a = 0.3$

$\Delta x = 1$ m

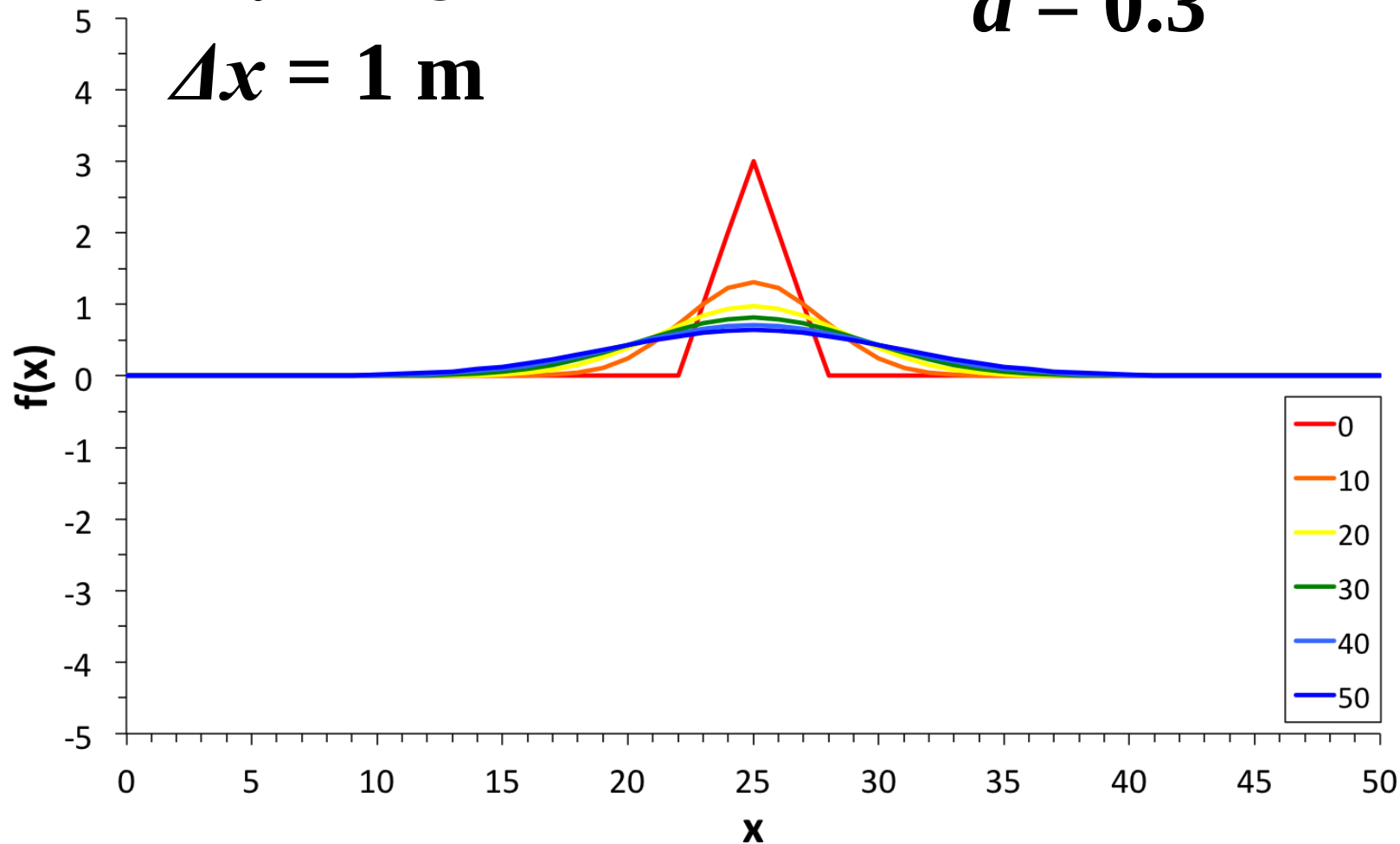


拡散方程式の差分解

$\Delta t = 1$ s 拡散方程式 中心差分 数値解

$a = 0.3$

$\Delta x = 1$ m



安定性ーノイマン法_(復習)

- ◎ 変数 $f(x, t)$ を、空間方向についてフーリエ変換すると

$$f(x, t) = \sum_k A_k(t) \exp(ikx)$$

- ◎ ノイマン(von Neumann)の安定条件:
時間発展とともにあらゆる波数 k の振幅 $A_k(t)$ が増幅しないこと

安定性ーノイマン法

- ◎ 差分点 ($x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$) における f の値 f_j^n を

$$f_j^n = A^n \exp(i k j \Delta x)$$

とおき、 $\lambda = A^{n+1} / A^n$ の大きさを求めて以下のように判別する

$$|\lambda| = \begin{cases} \leq 1 & \dots \text{安定} \\ > 1 & \dots \text{不安定} \end{cases}$$

全ての k について安定なら、無条件安定

◎ $\lambda = \lambda_r + i \lambda_i$ (λ_r, λ_i は実数)

◎ $|\lambda|$:

$$|\lambda| = \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_i^2}$$

◎ これまで講義したことを復習する:

- ・移流スキーム: 陽解法 + 中央差分
- ・拡散スキーム: 陽解法 + 中央差分

(1) 移流方程式の安定性

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial x}$$

◎ 陽解法、中心差分での移流方程式の差分形式

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = -c \frac{-f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2\Delta x}$$

についての波数 k の振幅の式は

$$\frac{A^{n+1} - A^n}{\Delta t} = -ic \frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x} A^n$$

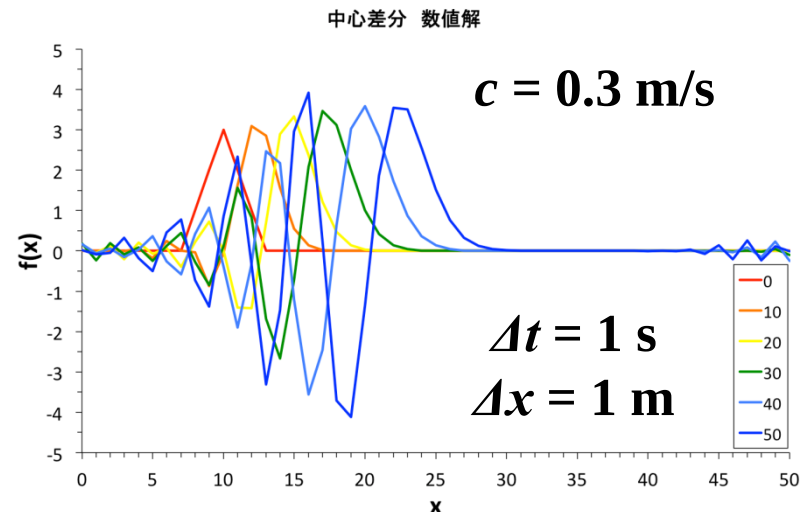
$$\lambda = \frac{A^{n+1}}{A^n} = 1 - i \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$$

(1) 移流方程式の安定性

◎ 振幅の大きさ $|\lambda|$ は

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(k\Delta x)} > 1$$

となり、従って、**陽解法**、**中心差分**による移流方程式の差分解法は、**無条件不安定**である



(2) 拡散方程式の安定性

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

◎ 拡散方程式の差分形式:

◎ 陽解法、

◎ 現在値の拡散

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = a \frac{f_{j-1}^n - 2f_j^n + f_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

についてフーリエ変換を適用し、安定性を調べる。波数 k の振幅の式は

$$\frac{A^{n+1} - A^n}{\Delta t} = 2a \frac{\cos(k\Delta x) - 1}{(\Delta x)^2} A^n$$

$$\lambda = \frac{A^{n+1}}{A^n} = 1 - \frac{4a\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

(2) 拡散方程式の安定性

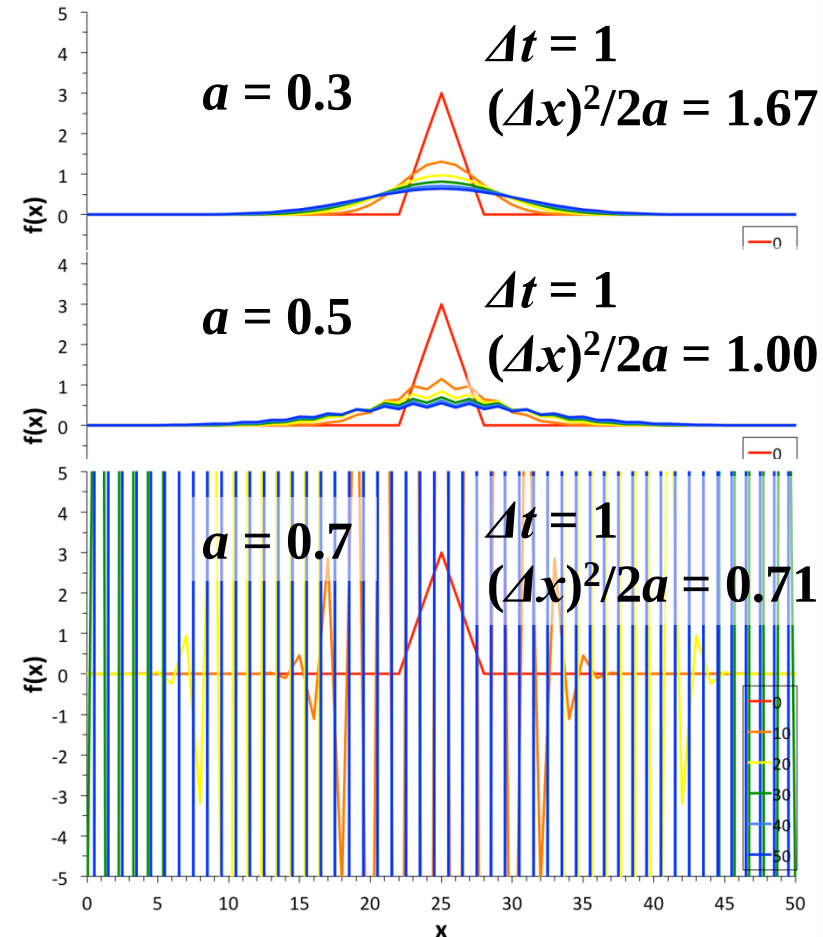
- 安定条件は $|\lambda| \leq 1$ であるから

$$-1 \leq 1 - \frac{4a\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \leq 1$$

- 結局、あらゆる波数 k について安定となる条件は

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2a}$$

- 条件付き安定



どうしてマイナス×マイナスはプラスなのか

最初に負の数を習ったときに、負の数同士を掛け合わせると正の数になると教わった。例えば、 $(-2) \times (-3) = 6$ 。不思議に思う人がずいぶん多い。

(3) 移流方程式の安定性

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial x}$$

- リープフロッグ法、中心差分での移流方程式の差分形式

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t} = -c \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

についての波数 k の振幅の式は

$$\frac{A^{n+1} - A^{n-1}}{2\Delta t} = -ic \frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x} A^n$$

$$\lambda^2 + i \frac{2c\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \lambda - 1 = 0$$

(3) 移流方程式の安定性

◎ 振幅の大きさ λ は

$$\lambda = -i \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \pm \sqrt{1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x)}$$

< 1 *neutral*

$$\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) \sin(k\Delta x) = 1 \quad \text{neutral}$$

> 1 *unstable*

となり、従って、**リープフロッグ法**、**中心差分**による移流方程式の差分解法は、**条件付安定**である

(3) 移流方程式の安定性

リープフロッグ法、中心差分による移流方程式の差分解析法の安定条件：

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$$

クーラン数： $C = c\Delta t / \Delta x$

→ 情報伝達距離 ($c\Delta t$) と格子幅 (Δx) の比。

一般に、 $C \leq 1$ は計算安定性の必要条件。これは $\Delta x / \Delta t \geq c$ であり、「情報が伝播する速さ」が「実際の現象の進む速さ」以上でなければならないことを示す。この条件をCFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件という

(4) 拡散方程式の安定性

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

◎ 拡散方程式の差分形式:

◎ リープフロッグ法、

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t} = a \frac{f_{j-1}^n - 2f_j^n + f_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

◎ 現在値の拡散

についてフーリエ変換を適用し、安定性を調べる。
波数 k の振幅の式は

$$\frac{A^{n+1} - A^{n-1}}{2\Delta t} = 2a \frac{\cos(k\Delta x) - 1}{(\Delta x)^2} A^n$$

$$\lambda^2 + \frac{8a\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \lambda - 1 = 0$$

$$\therefore \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

(4) 拡散方程式の安定性

◎ $|\lambda| > 1$ であるので、いつも不安定である。

リープフロッグ法で、拡散項に現在値を用いるのは無条件不安定である。

拡散項には過去値をもちいるべき。

$$\frac{A^{n+1} - A^{n-1}}{2\Delta t} = 2a \frac{\cos(k\Delta x) - 1}{(\Delta x)^2} A^{n-1}$$

$$\lambda^2 - 1 + \frac{8a\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{1 - \frac{8a\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{8a\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}} < 1$$

$$\frac{8a\Delta t}{(\Delta x)^2} < 1$$

$$\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1$$

$$a < \frac{0.1}{8} = 0.0125$$

$a = 0.01$ の値であれば拡散項に関しては安定である

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} - a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{-f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2\Delta x} - a \frac{f_{j+1}^{n-1} - 2f_j^{n-1} + f_{j-1}^{n-1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$f_j^{n+1} = f_j^{n-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + a \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} (f_{j+1}^{n-1} - 2f_j^{n-1} + f_{j-1}^{n-1})$$

- ・時間：リープフロッグ法がよい（2次の精度、移流スキームはCFL条件を満たせばよい）
- ・移流スキーム：中央差分
- ・拡散項：過去値を使う

$$f_j^{n+1} = f_j^{n-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + a \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} (f_{j+1}^{n-1} - 2f_j^{n-1} + f_{j-1}^{n-1})$$

$$\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1$$

$$c = 0.2$$

$$a = 0.01$$

1次元線形移流拡散式_プログラム作成 (2)
のエクセル参照

$$f_j^{n+1} = f_j^{n-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + a \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} (f_{j+1}^{n-1} - 2f_j^{n-1} + f_{j-1}^{n-1})$$

(1) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, c = 0.2, a = 0.01$ (○)

(2) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 1.0, c = 0.2, a = 0.01$ (×)

(3) $\Delta t = 1.0, \Delta x = 0.1, c = 0.2, a = 0.01$ (×)

(4) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, c = 0.8, a = 0.01$ (○)

(5) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, c = 1.5, a = 0.01$ (×)

(6) $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.1, c = f_j^n, a = 0.01$ (Δ)

宿題: (1)から(6)までの(x、t、振幅)の図を描け

2014年1月20日(月) 午後5時まで

3417室