第7回

大気環境シミュレーション

Maclaurinの級数

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \bullet\bullet\bullet = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \bullet\bullet\bullet$$

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \bullet\bullet\bullet$$

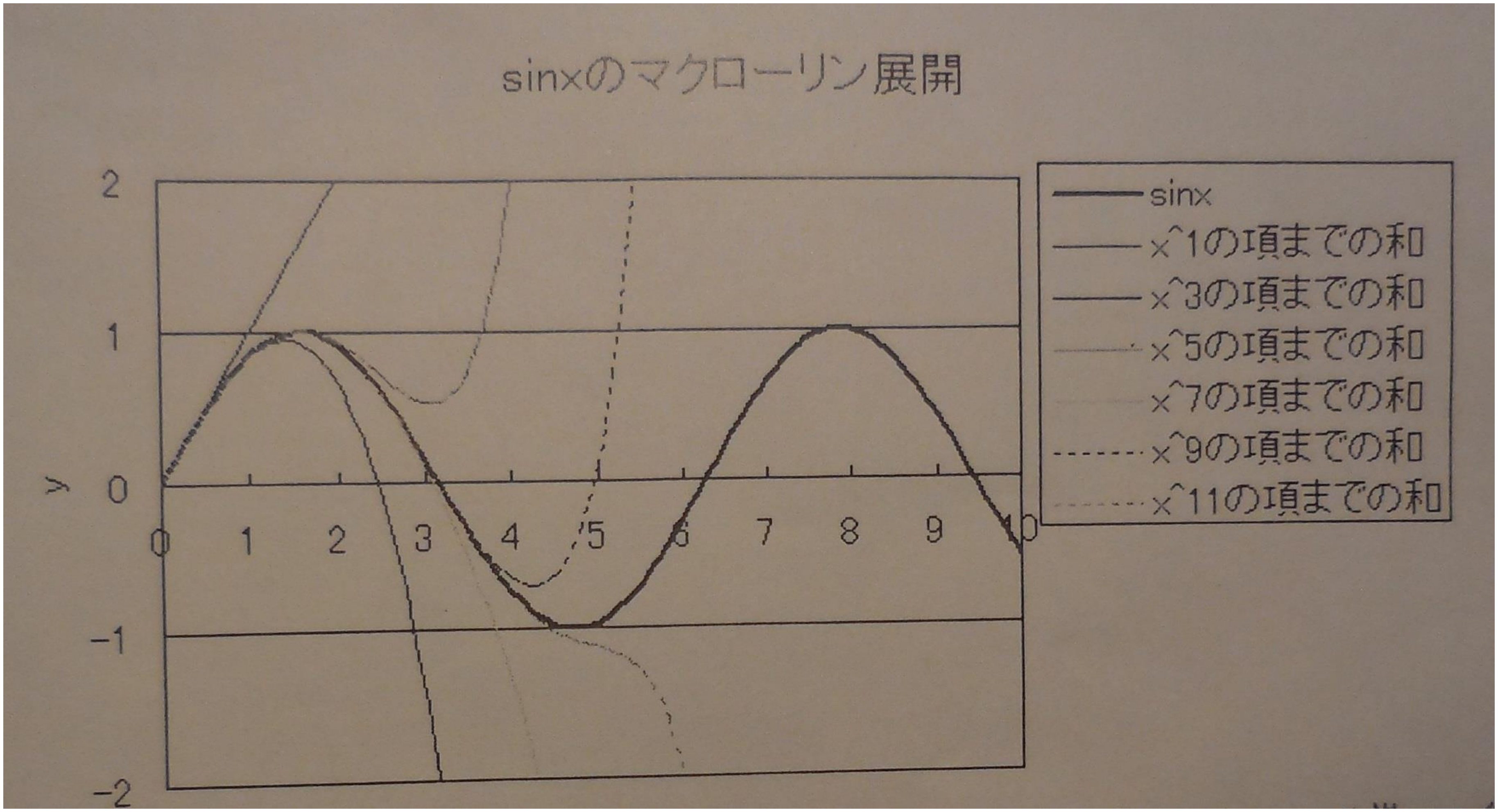
$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \bullet\bullet\bullet$$

Taylorの級数

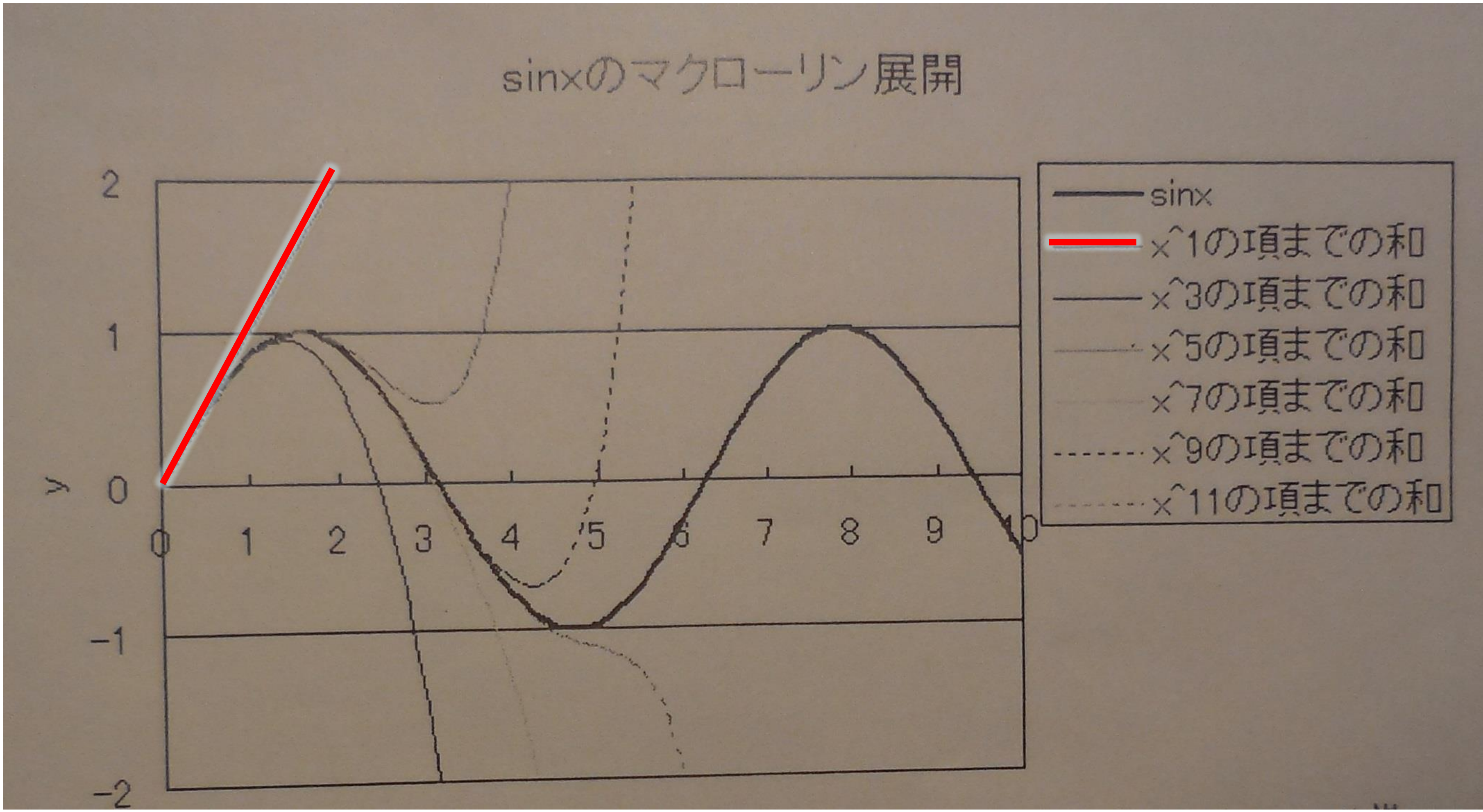
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \bullet\bullet\bullet$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

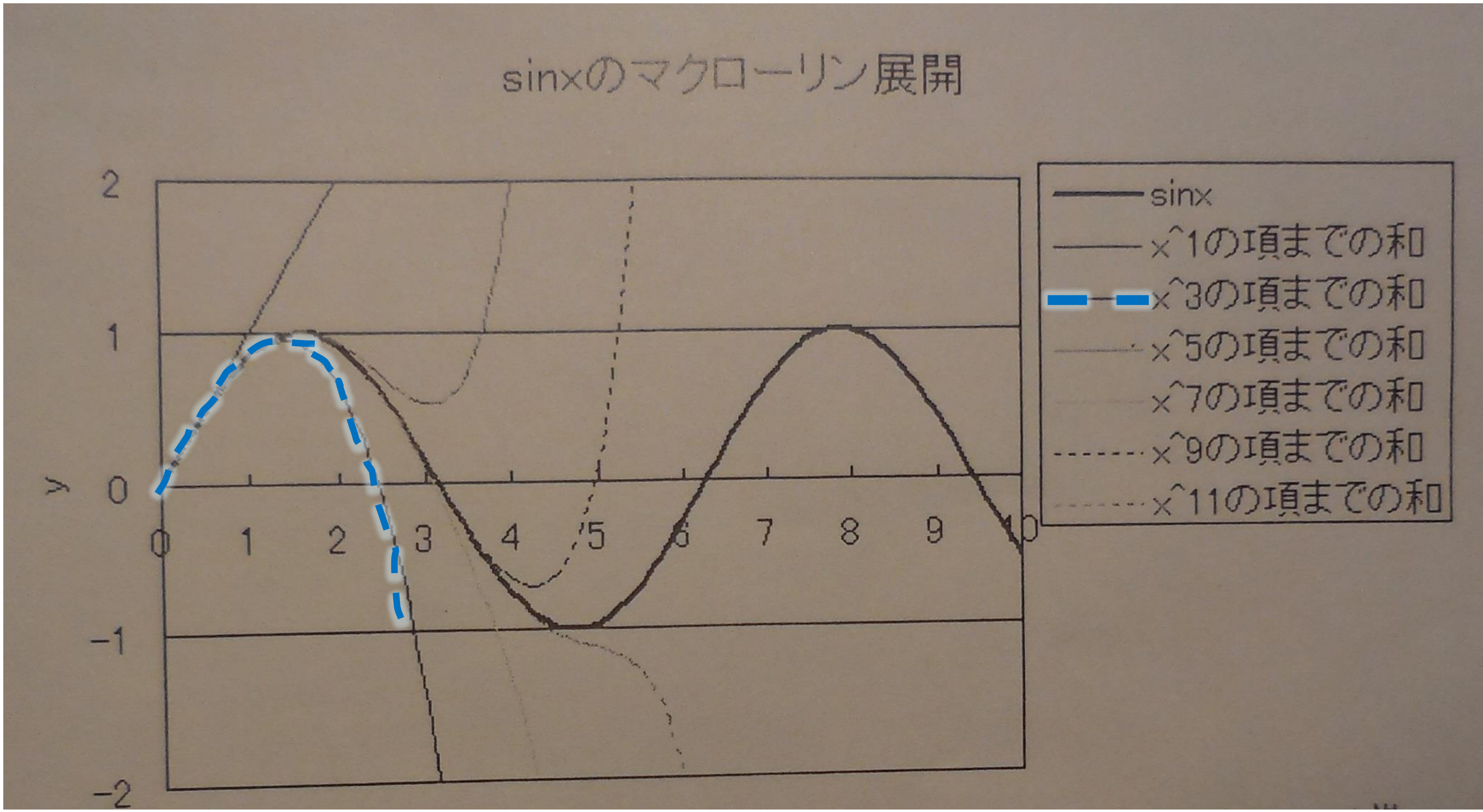
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 - \frac{1}{9!}x^9 + \dots$$



$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 - \frac{1}{9!}x^9 + \ldots$$



$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 - \frac{1}{9!}x^9 + \ldots$$



支配方程式系

- 水平方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} + fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} - fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_y$$

水平風の
時間変化
（局所変化）

移流効果

コリオリ
力

気圧傾度
力

その他
外力

支配方程式系

- 鉛直方向の運動方程式

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t}} = \boxed{-u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z}} \boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}} \boxed{-g} \boxed{+F_z}$$

鉛直風の時間変化
移流効果
気圧傾度力
重力
その他外力

- 質量保存則（連続の式）

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = \boxed{-u\frac{\partial \rho}{\partial x} - v\frac{\partial \rho}{\partial y} - w\frac{\partial \rho}{\partial z}} \boxed{-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}$$

空気密度の時間変化
密度移流
収束・発散による変化

・支配方程式系は、すべて時間変化を含む式で構成されている。

・それぞれの式を時間積分すれば将来予測ができる。→ 初期値問題

・ところが、運動方程式としてNS方程式を用いれば、流体のもつさまざまな伝搬速度を持つ波動を含むことになる。→ 音波、重力波、ロスビー波など

・大規模な運動方程式のためには音波や重力波は不要である場合がある。そのような波動はあらかじめフィルターした支配方程式系を用いた方が時間間隔は大きく取れて早く計算ができる

・気象学ではさまざまな近似の方程式系が考えられてきた。例えば、音波をフィルターした連続の式として、$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ が使われてきた。

・その場合、境界値問題を解く必要が出てくる。

・音波をフィルターした2次元モデルは次の通り:

( )'は変数、( )$_0$と定数とする。

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -u'\frac{\partial u'}{\partial x} - w'\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}, \qquad (1)$$

Adv(u)

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -u'\frac{\partial w'}{\partial x} - w'\frac{\partial w'}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\theta_0}g, \qquad (2)$$

Adv(w)

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -u'\frac{\partial \theta}{\partial x} - w'\frac{\partial \theta}{\partial z}, \qquad (3)$$

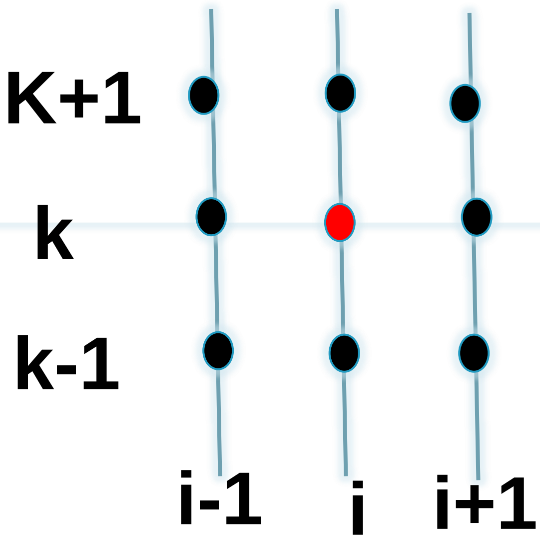
Adv(θ)

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \qquad (4)$$

(1)(2)(3)は時間変化項を含むので、u', w', θ'は時間積分できる。ところが、p'は時間項がない。どうする？

$$\frac{\partial}{\partial x}(1)+\frac{\partial}{\partial z}(2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}$$

$$=\rho_0\left[\frac{\partial Adv(u)}{\partial x}+\frac{\partial Adv(w)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right)\right]\equiv\sigma'$$



境界値問題

$$\frac{p'_{i+1,k}-2p'_{i,k}+p'_{i-1,k}}{(\Delta x)^2}+\frac{p'_{i,k+1}-2p'_{i,k}+p'_{i,k-1}}{(\Delta z)^2}=\sigma'_{i,k}$$

[微分方程式の解法の方針]
様々な操作を使って、微分式を代数式に変換する

- Dimension Reduction Method (DRM)

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \sigma' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \overset{\frown}{p}}{\partial z^2} - \frac{e^2}{(\Delta x)^2}\overset{\frown}{p} = \overset{\frown}{\sigma}$$

$$\frac{\partial^2 \overset{\frown}{p}}{\partial x^2} = -\frac{e^2}{(\Delta x)^2}\overset{\frown}{p}$$ と書けることが必要。

(例) x方向にはp'の周期解を求める
→解は独立な周期解の組み合わせで表現できる

1. 行列による解法

$$\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{(\Delta x)^2} = -e^2 \frac{p_i}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1} = -e^2 p_i$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \bullet & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \bullet & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \bullet & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \bullet \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix} = -e^2 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \bullet \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix}$$

n×n

固有関数

固有値

フーリエ級数

- 周期 $2l$ をもつ関数 $f(x)$ は、三角関数の和として表現できる

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

- オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いると

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\frac{in\pi x}{l}$$

- 波数 $k = n\pi/l$ を用いて

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikx)$$

2. Fourier（フーリエ）級数による解法

$$\frac{p_{i+1}-2p_i+p_{i-1}}{(\Delta x)^2}=-e^2\frac{p_i}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow p_{i+1}-2p_i+p_{i-1}=-e^2 p_i$$

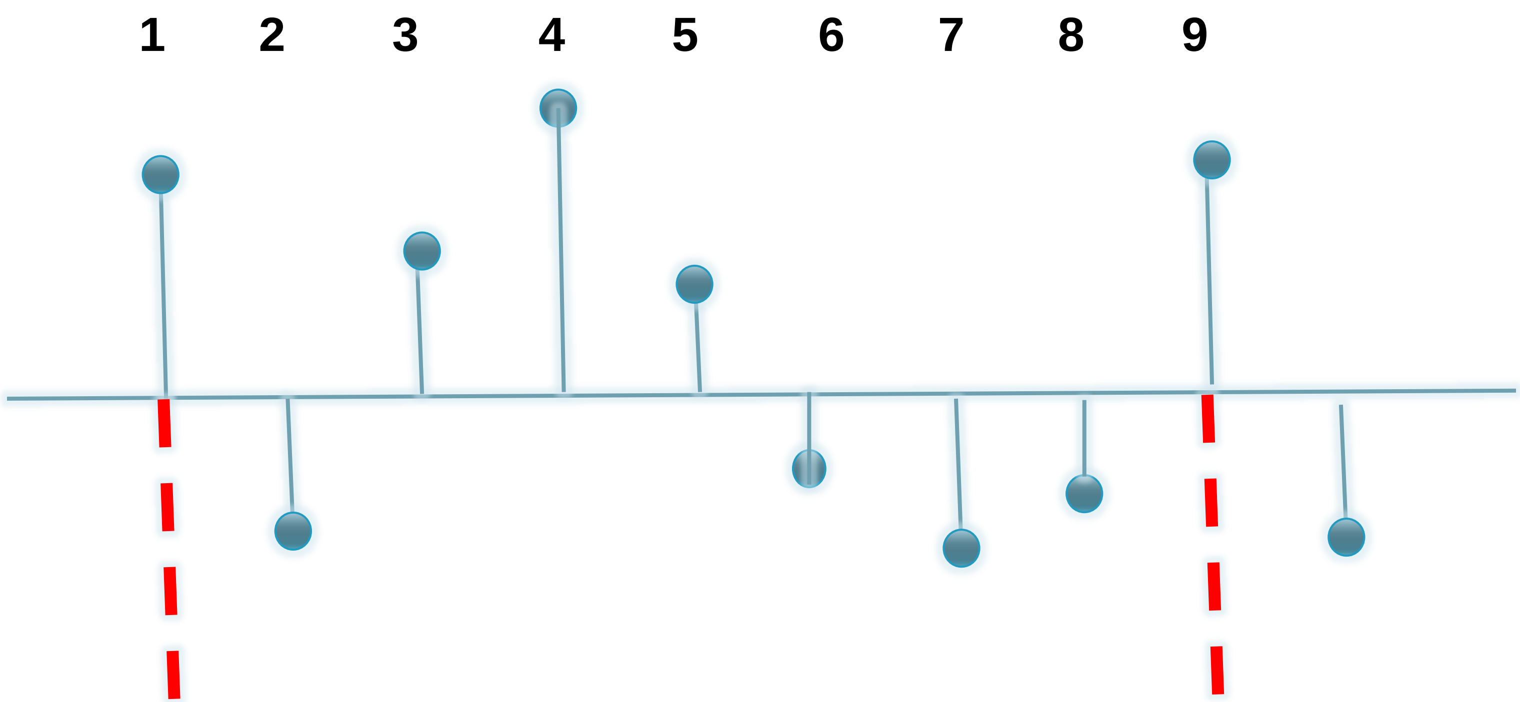
・周期的な場を考える
・もしpを sin(kx), cos(kx) とフーリエ級数で展開すると、e^2は k^2 にほぼ比例すると予想される。
・つまり、固有値が k^2 (=波数^2)で、固有関数が sin(kx), cos(kx)となる。

・だから、そのような周期解を使ってpを表現できる。

$$\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{(\Delta x)^2} - c\frac{p_i}{(\Delta x)^2} = \frac{\sigma_i}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow p_{i+1} - (2+c)p_i + p_{i-1} = \sigma_i$$ **cは定数**

N=8の場合、σが与えられたときにpの値はどうなるか？ ** 境界値問題**



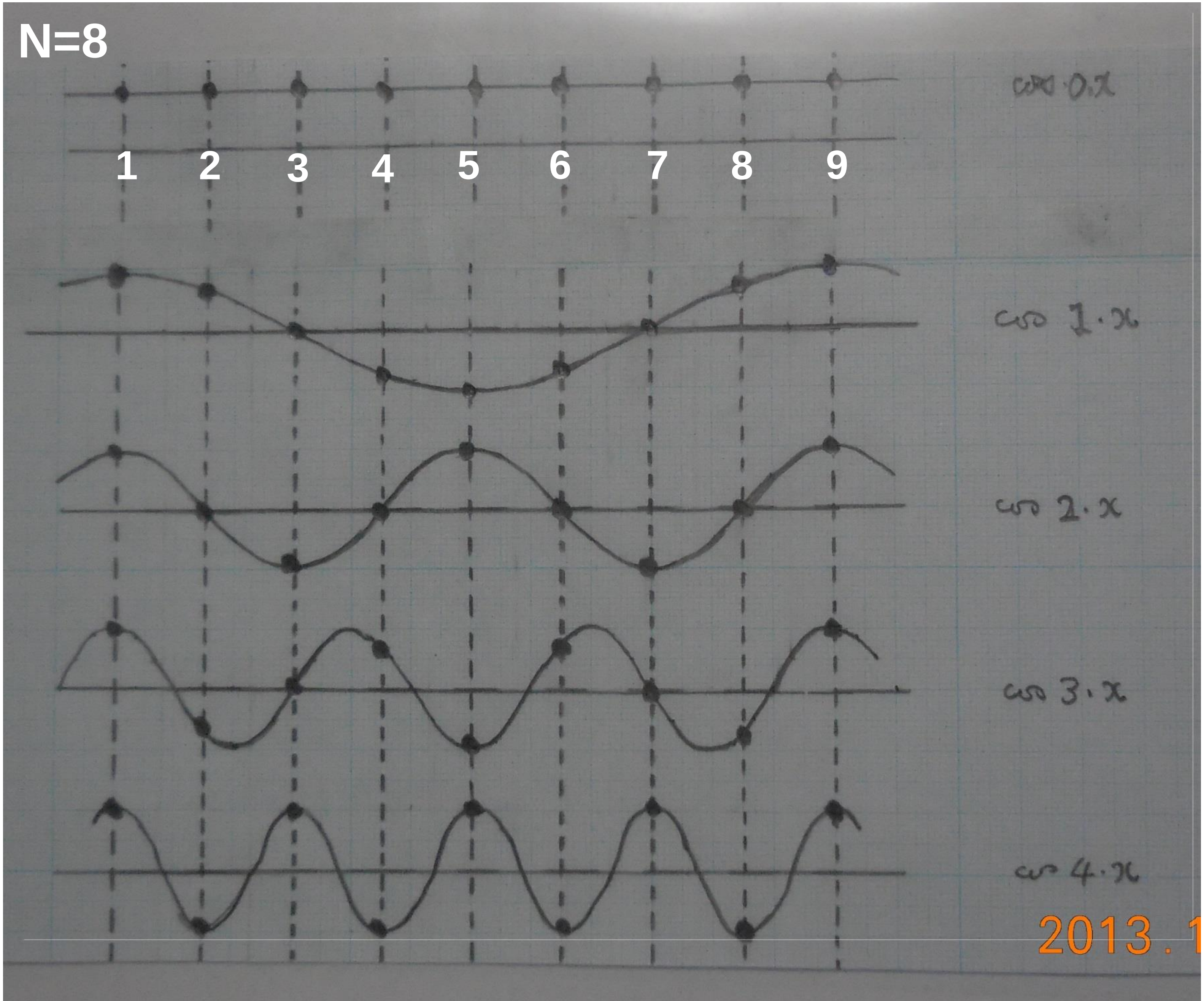
$$p(x_i) \equiv p_i = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{N/2} a_m \cos\frac{2m\pi x_i}{N\Delta x} + \sum_{m=1}^{N/2-1} b_m \sin\frac{2m\pi x_i}{N\Delta x}$$

$$\sigma(x_i) \equiv \sigma_i = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{N/2} c_m \cos\frac{2m\pi x_i}{N\Delta x} + \sum_{m=1}^{N/2-1} d_m \sin\frac{2m\pi x_i}{N\Delta x}$$

$$a_m = \sum_{i=1}^{N} p_i \cos\frac{2m\pi x_i}{N\Delta x}, \quad b_m = \sum_{i=1}^{N} p_i \sin\frac{2m\pi x_i}{N\Delta x}$$

$$c_m = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \cos\frac{2m\pi x_i}{N\Delta x}, \quad d_m = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sin\frac{2m\pi x_i}{N\Delta x}$$

$$for\ m = 0, 1, 2, \bullet\bullet\bullet, N/2$$



波数

0

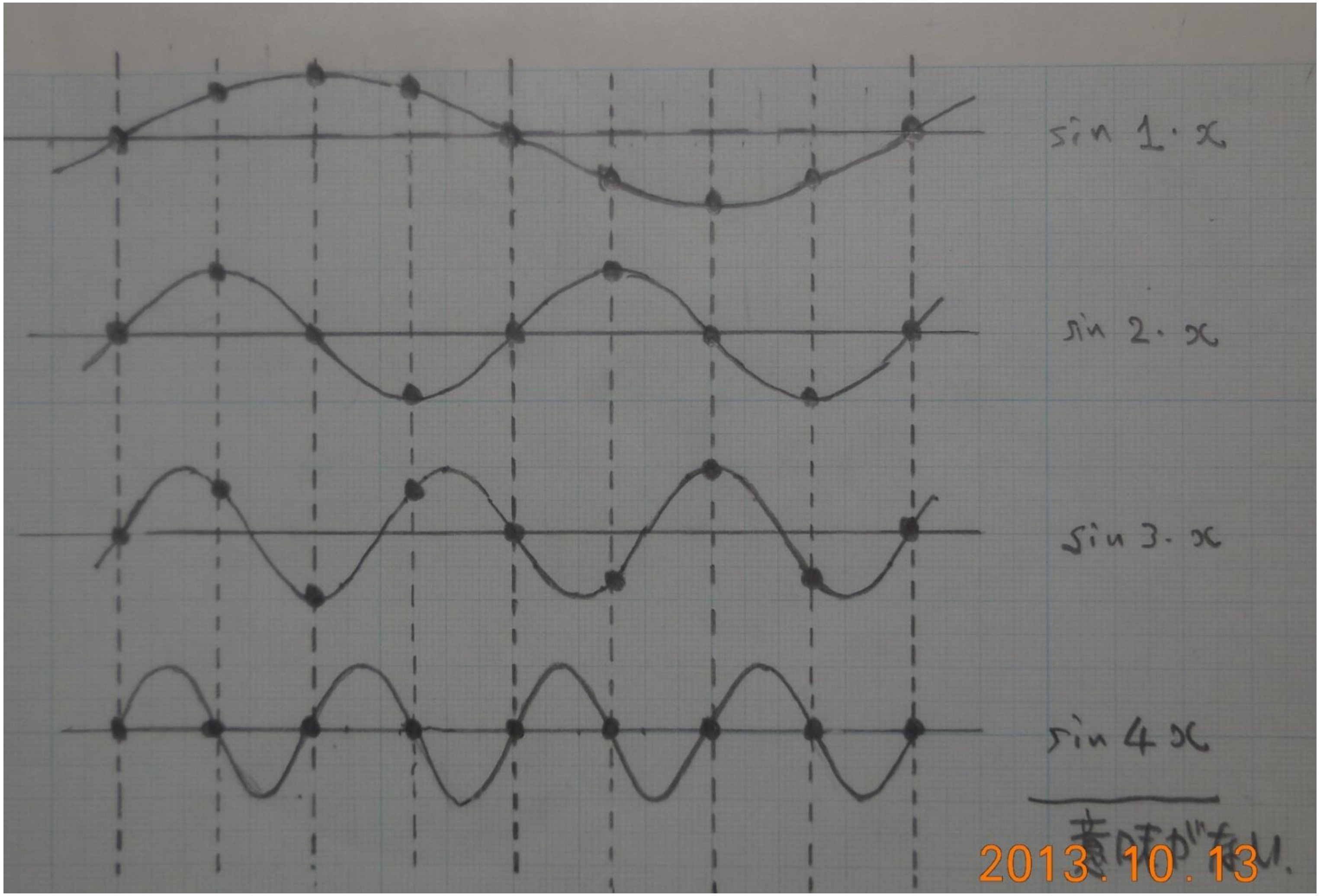
1

2

3

4

波数



1

2

3

4

1 2 3 4 5 6 7 8 9

8つの変数の決定は、フーリエ展開では一つの定数、4つのcos、3つのsinの振幅の和を決めることに対応

フーリエ展開から解を求める方法

(1) $\sigma_i \rightarrow c_m, d_m$ フーリエ展開

(2) mの固有値を求める

$$-e_m^2=2(1-\cos 2m\pi/N\Delta x)$$

(3) a_m, b_mをσのフーリエ展開モードから得る

(4) p_iをa_m, b_mから得る

ニュートン法 （Newton method, Newton-Raphson)
Ｆ（x）=0を満たすｘを求める求根法

初めに、予想される真の解に近いと思われる値をひとつとる。
次に、そこでグラフの接線を考え、その *x* 切片を計算する。この*x*切片の値は、予想される真の解により近いものとなるのが一般である。以後、この値に対してそこでグラフの接線を考え、同じ操作を繰り返していく。

インターネット　ウキペディア

次のように定式化される。ここでは、

$$f(x) = 0$$

となる x を求める。

このとき、x の付近に適当な値 x_0 をとり、次の漸化式によって、x に収束する数列を得ることができる場合が多い。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \cdots (1)$$

ニュートン法の原理 （1）

Taylorの級数

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \bullet\bullet\bullet$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

このうち、第2項をとると、

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad x \approx a + \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)}$$

ニュートン法の原理 （2）

$$x \approx a + \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

繰り返し法では、ほしい解は　$f(x_{n+1})=0$であある

例として、$\sqrt{2}$ を計算で求める場合に、

$$f(x) = x^2 - 2$$

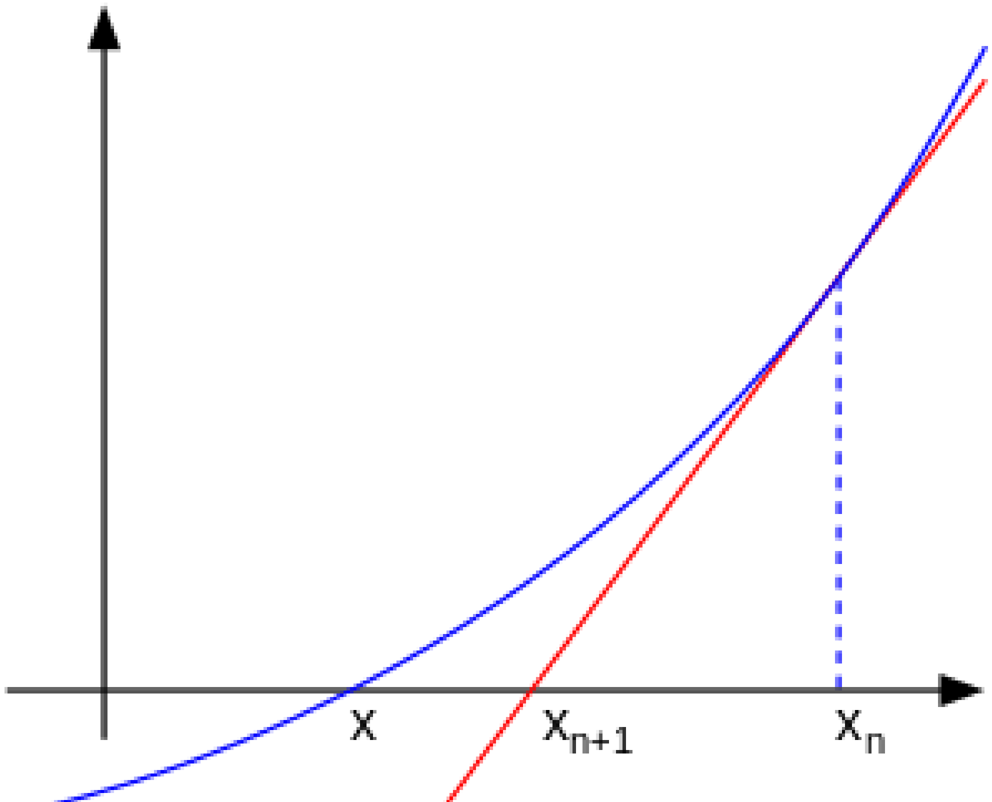
とおき、$f(x) = 0$ の解を求めることを考える。

$$f'(x) = 2x$$

であるので、(1) の式は

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

と書き表せる。たとえば $x_0 = 1$ とおくと、この数列は $\sqrt{2}$ に収束し、$x_0 = -1$ とおくと、この数列は $-\sqrt{2}$ に収束する。



ニュートン法の一手順の概念図 (青い線が関数 *f* のグラフで、その接線を赤で示した). x_n よりも x_{n+1} のほうが、*f*(*x*)=0 の解 *x* についてのよりよい近似を与えている.

宿題

次の関数の解はわかっている。

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$x = -3, -1, 1, 3$$

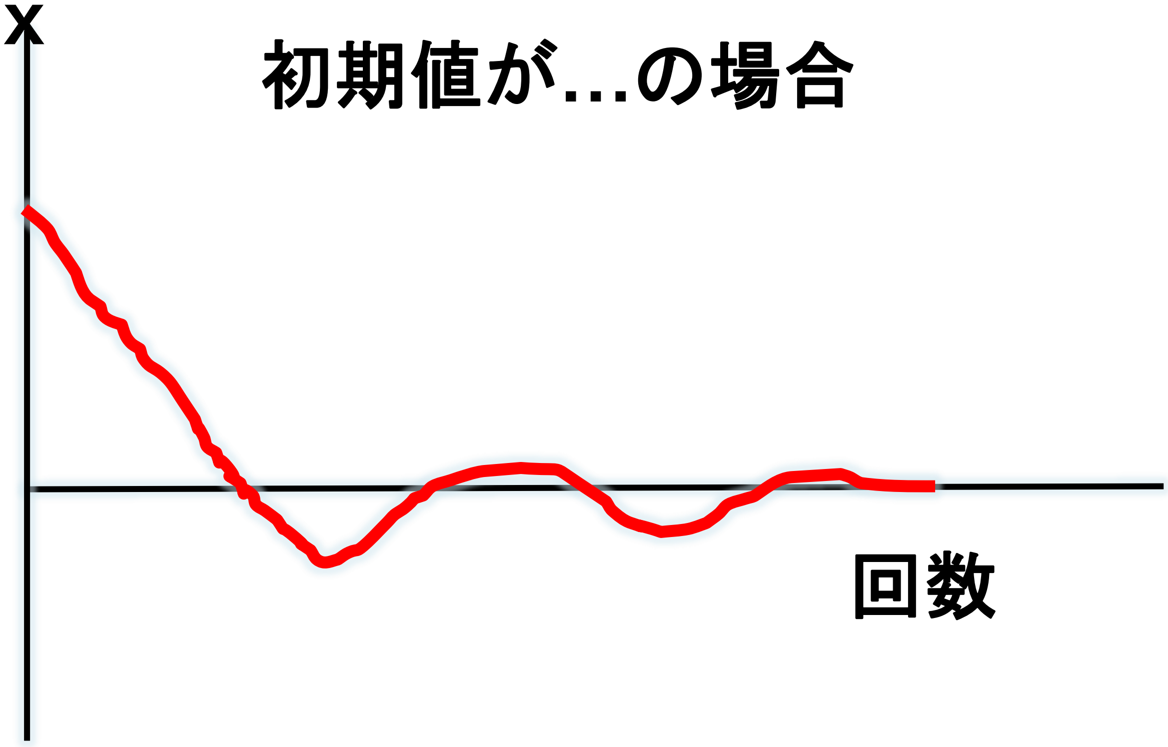
しかし、次の初期値から出発したときの収束解はどうなるか。

（1） −3.5,　　（2） −2.5,
（3） −1.5,　　（4） −0.5,
（5） 0.5,　　（6） 1.5,
（7） 2.5,　　（8） 3.5,

- EXCELで計算する。
- 繰り返し回数は20回
- 収束する様子を図示する。繰り返しの回数を横軸、
  そのときの解を縦軸に描く。
- 図は8枚となる。

締切は11月18日（月）17時まで。3417室。A4サイズ

回数	x	f(x)	f’(x)	x－f(x)/f’(x)
1				
2				
3				
…				
18				
19				
20				


x
初期値が…の場合
回数