

安定性解析

- ◎ 差分近似などによる離散化によって、大気要素の時々刻々の状態を求めることができる
- ◎ しかし、これまで見てきたように、時間発展の過程で数値的な不安定が発生し、計算が破綻してしまうことがある
- ◎ 計算条件が数値的な不安定を起こしやすいかどうかのチェック

フーリエ級数

- 周期 $2l$ をもつ関数 $f(x)$ は、三角関数の和として表現できる

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

- オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いると

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \frac{in\pi x}{l}$$

- 波数 $k = n\pi/l$ を用いて

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikx)$$

ノイマン法

- ◎ 差分点 ($x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$) における f の値 f_j^n を

$$f_j^n = A^n \exp(i k j \Delta x)$$

i ; 虚数
 k ; 波数

とおき、 $A = A^{n+1} / A^n$ の大きさを求めて以下のように判別する

$$|A| = \begin{cases} \leq 1 & \dots \text{安定} \\ > 1 & \dots \text{不安定} \end{cases}$$

全ての k について安定なら、無条件安定

移流方程式の安定性

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial x}$$

- 陽解法、風上差分での移流方程式の差分形式

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = -c \frac{-f_{j-1}^n + f_j^n}{\Delta x}$$

についての波数 k の振幅の式は

$$\frac{A^{n+1} - A^n}{\Delta t} = -c \frac{\{1 - \cos(k\Delta x)\} + i \sin(k\Delta x)}{\Delta x} A^n$$

$$A = \frac{A^{n+1}}{A^n} = \left[1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \{1 - \cos(k\Delta x)\} \right] - i \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$$

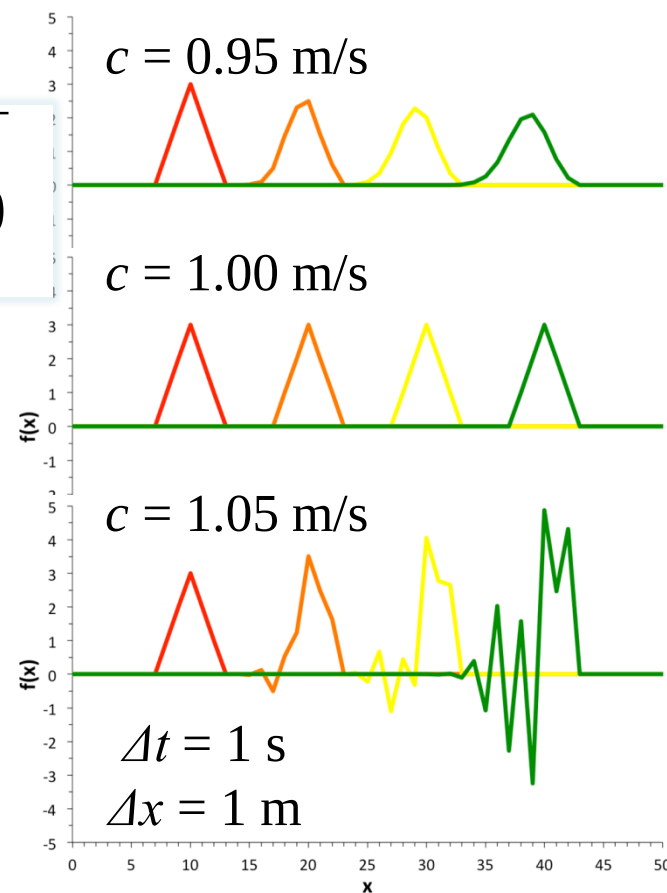
移流方程式の安定性

- 振幅の大きさ $|A|$ は

$$|A| = \sqrt{\left[1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \{1 - \cos(k\Delta x)\}\right]^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x)}$$

従って、陽解法、風上差分による
移流方程式の差分解法は、条
件に従って安定性が変わる

- クーラン数: $C = c\Delta t / \Delta x$
情報伝達距離と格子幅の比。
一般に、 $C \leq 1$ は計算安定性の
必要条件 (CFL条件)



CFL条件

- ◎ クーラン (Courant) 数: $C = c\Delta t / \Delta x$
→ 情報伝達距離 ($c\Delta t$) と格子幅 (Δx) の比。
- ◎ 一般に、 $C \leq 1$ は計算安定性の必要条件。
これは $\Delta x / \Delta t \geq c$ であり、「情報が伝播する
速さ」が「実際の現象の進む速さ」以上でな
なければならないことを示す。この条件をCFL
(Courant-Friedrichs-Lewy) 条件という

まとめ

- ・ 移流の差分スキーム:

- * 中央差分は分散性、風上差分は拡散性をもつ

- * 条件に従って安定性は変わる

- * クーラン数: $C = c \Delta t / \Delta x$

情報伝達距離と格子幅の比。一般に、 $C \leq 1$ は
計算安定性の必要条件(CFL条件)

- ・ 拡散の差分スキーム:

- * a を拡散係数とすると、安定条件は

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2a}$$

- ・ ほかにモデルの持つ波動を考慮する必要がある

支配方程式系

◎ 水平方向の運動方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y\end{aligned}$$

水平風の
時間変化
(局所変化)

移流効果

コリオリ
力

気圧傾度
力

その他
外力

支配方程式系

鉛直方向の運動方程式

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z$$

鉛直風の時間変化

移流効果

気圧傾度力

重力

その他外力

質量保存則 (連続の式)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -u \frac{\partial \rho}{\partial x} - v \frac{\partial \rho}{\partial y} - w \frac{\partial \rho}{\partial z} - \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

空気密度の時間変化

密度移流

収束・発散による変化

支配方程式系

● 熱力学第1法則（熱エネルギーの保存則）

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v \frac{\partial \theta}{\partial y} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} + Q$$

温位の時間変化

移流効果

非断熱過程に伴う加熱・冷却

● 状態方程式

$$p = \rho R T$$

気圧

密度

気体定数

気温

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/C_P}$$

- ・支配方程式系は、すべて時間変化を含む式で構成されている。
- ・それぞれの式を時間積分すれば将来予測ができる。
- ・ところが、運動方程式としてNS方程式を用いれば、流体のもつさまざまな伝搬速度を持つ波動を含むことになる。→ 音波、重力波、ロスビー波など
- ・大規模な運動方程式のためには音波や重力波は不要である場合がある。そのような波動はあらかじめフィルターした支配方程式系を用いた方が時間間隔は大きく取れて早く計算ができる

- ・気象学ではさまざまな近似の方程式系が考えられてきた。例えば、音波をフィルターした連続の式として、 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ が使われてきた。
- ・その場合、境界値問題を解く必要が出てくる。
- ・音波をフィルターした2次元モデルは次の通り：

()'は変数、()₀と定数とする。

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -u' \frac{\partial u'}{\partial x} - w' \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (1) \quad \text{Adv}(u)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -u' \frac{\partial w'}{\partial x} - w' \frac{\partial w'}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\theta_0} g, \quad (2) \quad \text{Adv}(w)$$

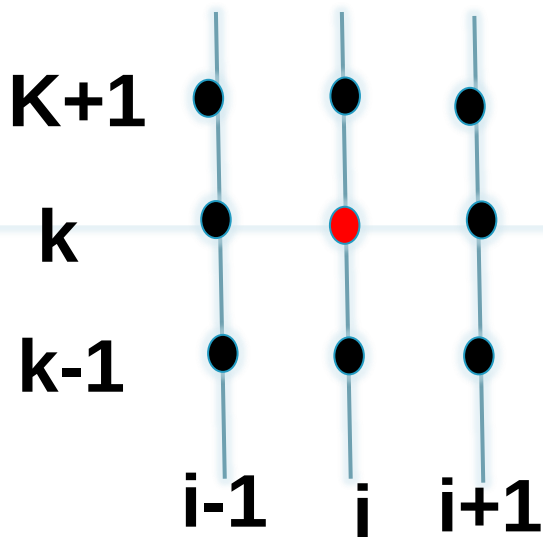
$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -u' \frac{\partial \theta'}{\partial x} - w' \frac{\partial \theta'}{\partial z}, \quad (3) \quad \text{Adv}(\theta)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

(1)(2)(3)は時間変化項を含むので、 u' , w' , θ' は時間積分できる。ところが、 p' は時間項がない。どうする？

$$\frac{\partial}{\partial x}(1) + \frac{\partial}{\partial z}(2) \Rightarrow \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}$$

$$= \rho_0 \left[\frac{\partial \text{Adv}(u)}{\partial x} + \frac{\partial \text{Adv}(w)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\theta'}{\theta_0} \right) \right] \equiv \sigma'$$



境界値問題

$$\frac{p'_{i+1,k} - 2p'_{i,k} + p'_{i-1,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{p'_{i,k+1} - 2p'_{i,k} + p'_{i,k-1}}{(\Delta z)^2} = \sigma'_{i,k}$$

[微分方程式の解法の方針]

様々な操作を使って、微分式を代数式に変換する

◎ Dimension Reduction Method (DRM)

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \sigma' \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} - \frac{a^2}{(\Delta x)^2} \hat{p} = \hat{\sigma}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} = -\frac{a^2}{(\Delta x)^2} \hat{p} \quad \text{と書けることが必要。}$$

(例) x方向には p' の周期解を求める

→ 解は独立な周期解の組み合わせで表現できる

1. 行列による表現

$$\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{(\Delta x)^2} = -a^2 \frac{p_i}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1} = -a^2 p_i$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \bullet & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \bullet & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \bullet & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \bullet \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix} = -a^2 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \bullet \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix}$$

$n \times n$

固有関数

固有値

●行列(マトリックス)の定義と行列計算

- ・ 2×2 の行列
- ・変数 x_1 、 x_2 、定係数 b_1 、 b_2 、 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{21} 、 a_{22} とする次のような線型式が成り立つとする。

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

上記の式を以下のように定義する。

行列
$$\begin{pmatrix} \overset{\text{red} \rightarrow}{a_{11}} & \overset{\text{red} \rightarrow}{a_{12}} \\ \overset{\text{blue} \rightarrow}{a_{21}} & \overset{\text{blue} \rightarrow}{a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\text{red} \downarrow}{x_1} \\ \overset{\text{blue} \downarrow}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\text{red} \rightarrow}{b_1} \\ \overset{\text{blue} \rightarrow}{b_2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \bullet & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \bullet & b_{2,n} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \bullet & b_{3,n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \bullet & b_{n-1,n} \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \bullet & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \bullet & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \bullet & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \bullet & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \bullet \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \bullet \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix} = -a^2 \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \bullet & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \bullet & b_{2,n} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \bullet & b_{3,n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \bullet & b_{n-1,n} \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \bullet & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \bullet \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix}$$

pを求めるには、このような行列Bを探す必要がある。

2. Fourier(フーリエ)級数による展開

$$\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{(\Delta x)^2} = -a^2 \frac{p_i}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1} = -a^2 p_i$$

- ・周期的な場を考える
- ・もし p を $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ とフーリエ級数で展開すると、 a^2 は k^2 に比例することが予想できる。
- ・つまり、固有値が k^2 で、固有関数が $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ となる。
- ・だから、そのような周期解で p を表現する。

$$\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{(\Delta x)^2} = -a^2 \frac{p_i}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1} = -a^2 p_i$$

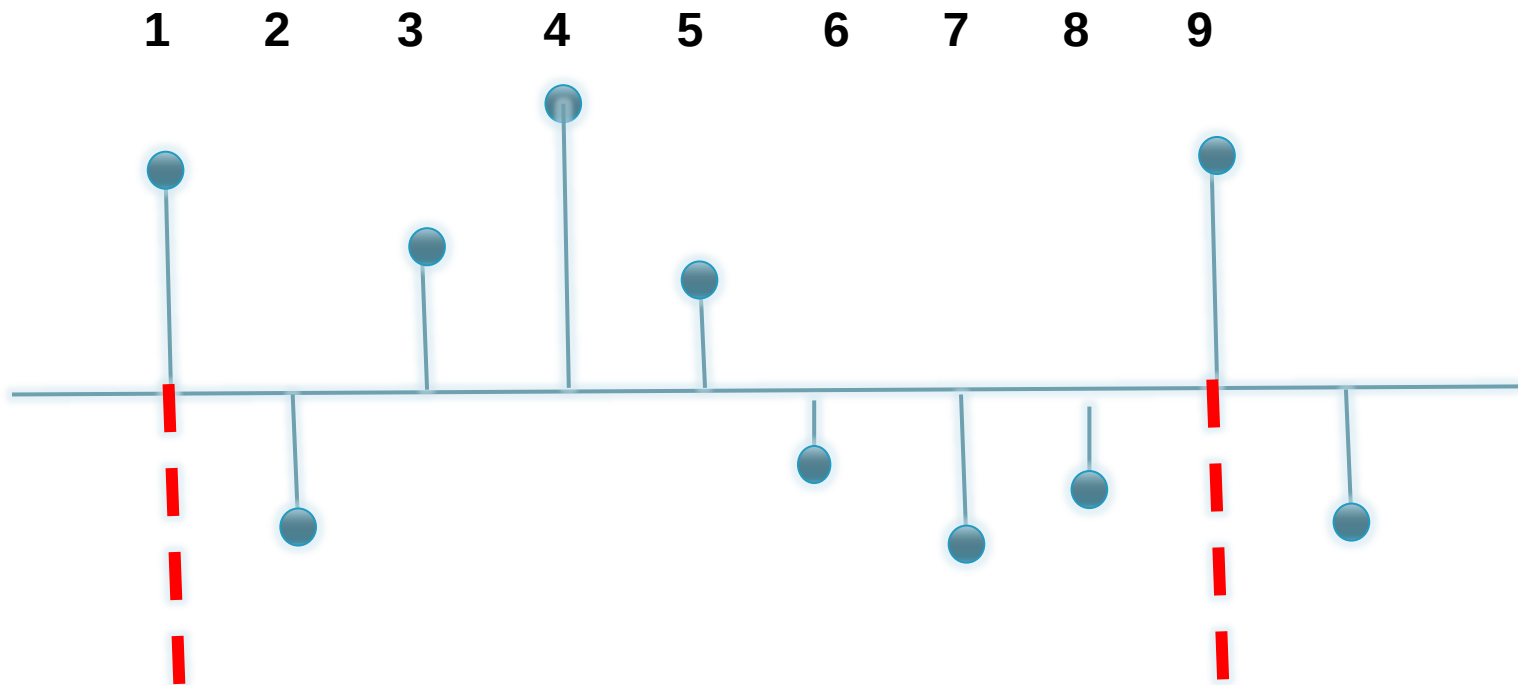
$$\Rightarrow \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{(\Delta x)^2} = \frac{\sigma_i}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1} = \sigma_i$$

$$\Rightarrow -a_m^2 \tilde{p}_m = \tilde{\sigma}_m$$

・フーリエ級数で展開すると、微分解は代数解に帰着する。

- ・ $N=8$ の場合、 σ が下のように与えられたとする。
このときの p の値はどうなるか？



$$p(x_i) \equiv p_i = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{N/2} a_m \cos \frac{2m\pi x}{N \Delta x} + \sum_{m=1}^{N/2-1} b_m \sin \frac{2m\pi x}{N \Delta x}$$

$$\sigma(x_i) \equiv \sigma_i = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{N/2} c_m \cos \frac{2m\pi x}{N \Delta x} + \sum_{m=1}^{N/2-1} d_m \sin \frac{2m\pi x}{N \Delta x}$$

$$a_m = \sum_{i=1}^N p_i \cos \frac{2m\pi x_i}{N \Delta x}, \quad b_m = \sum_{i=1}^N p_i \sin \frac{2m\pi x_i}{N \Delta x}$$

$$c_m = \sum_{i=1}^N \sigma_i \cos \frac{2m\pi x_i}{N \Delta x}, \quad d_m = \sum_{i=1}^N \sigma_i \sin \frac{2m\pi x_i}{N \Delta x}$$

for $m = 0, 1, 2, \dots, N/2$

1

2

3

4

5

6

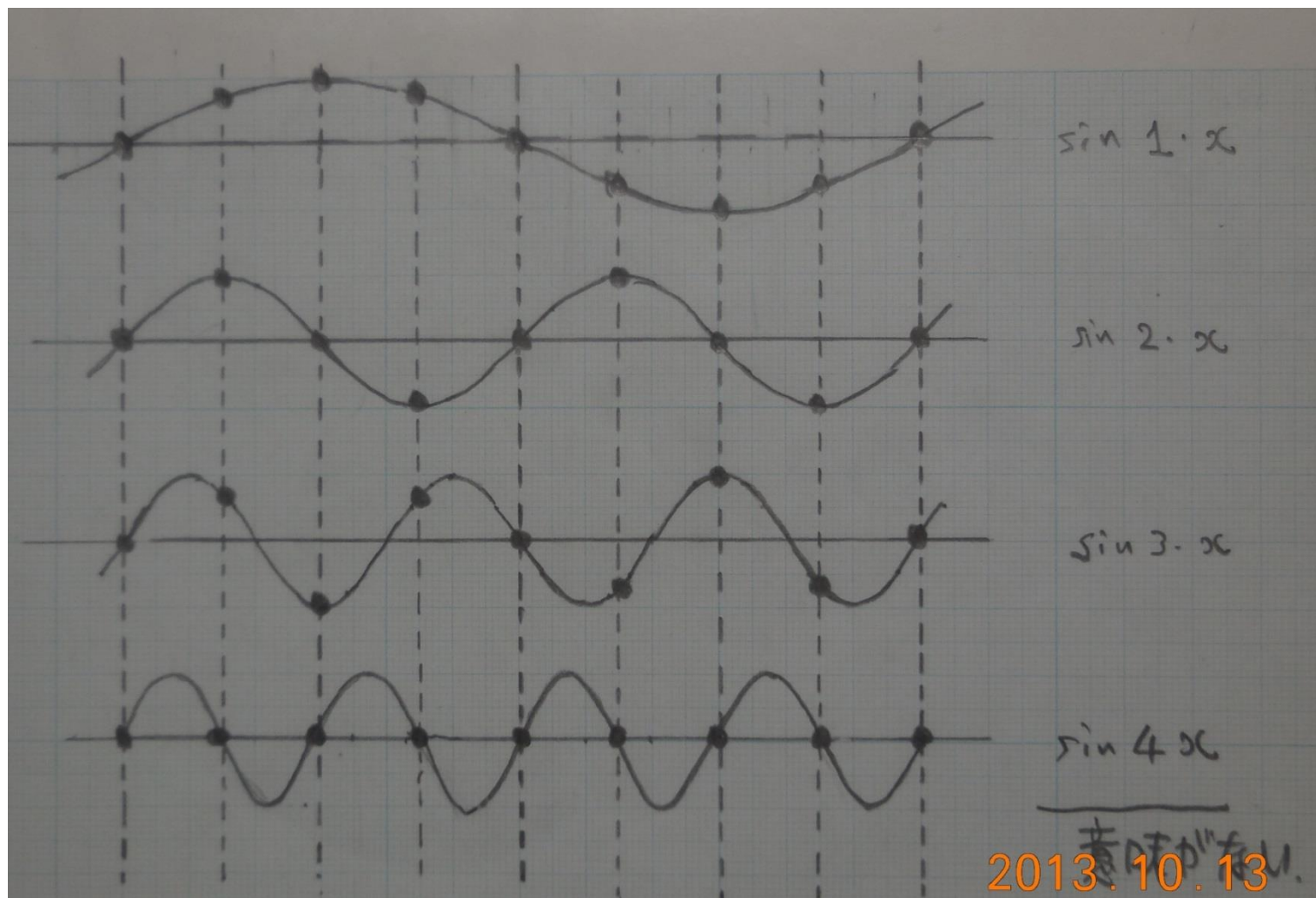
7

8

9

 $\cos 0 \cdot x$ $\cos 1 \cdot x$ $\cos 2 \cdot x$ $\cos 3 \cdot x$ $\cos 4 \cdot x$

2013.1



1 2 3 4 5 6 7 8 9