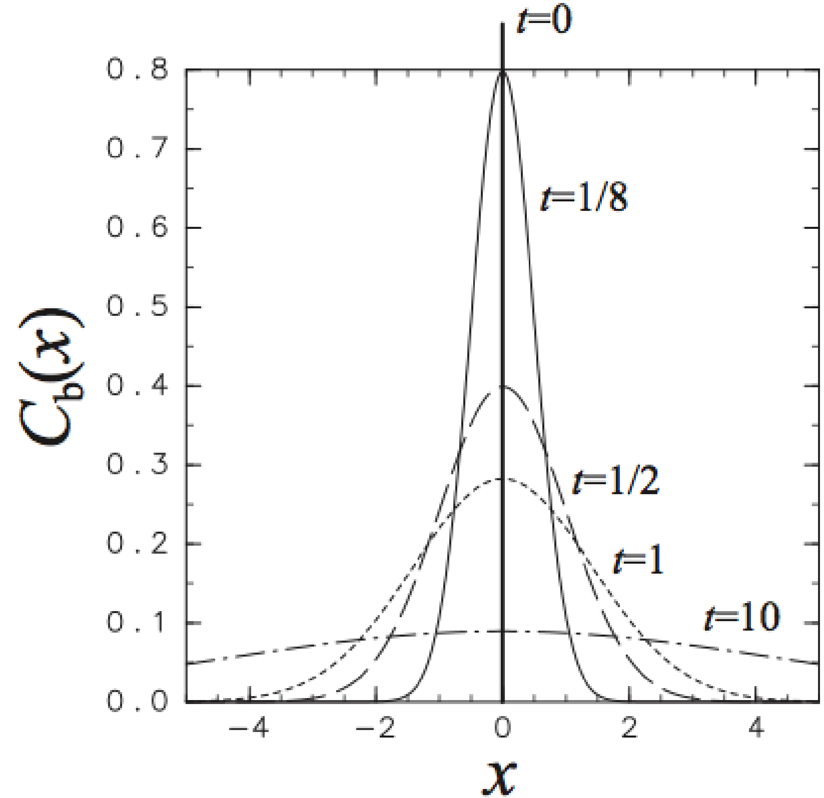
拡散方程式

- 拡散方程式　　$a(\geq 0)$は拡散係数で定数とする

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- 拡散方程式の解は、上に凸($\partial^2 f/\partial x^2 < 0$)のところで減少($\partial f/\partial t < 0$)し、下に凸($\partial^2 f/\partial x^2 > 0$)のところで増加($\partial f/\partial t > 0$)するので、分布を平滑化させる解となる



拡散方程式の差分近似

- 拡散方程式

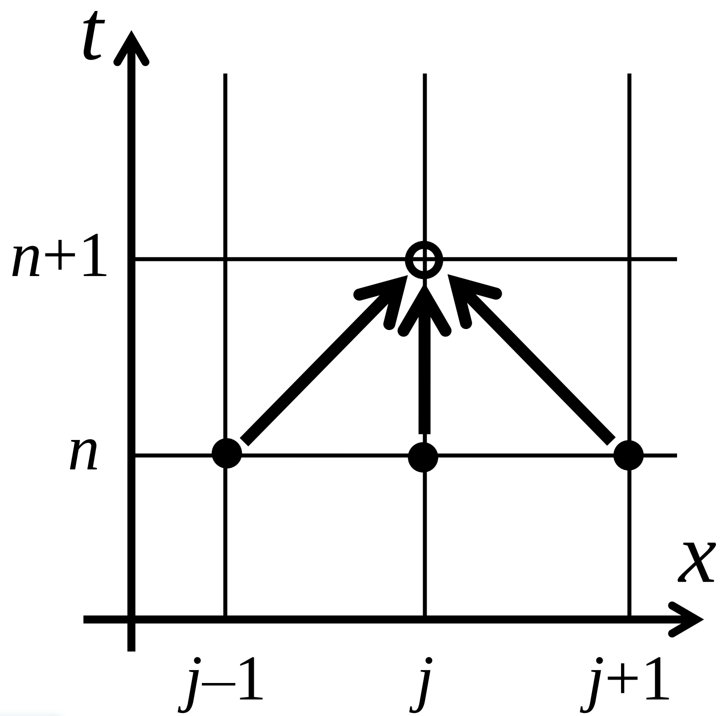
$$\frac{\partial f}{\partial t} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

を中心差分で差分近似すると、

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = a\frac{f_{j-1}^n - 2f_j^n + f_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

整理すると、

$$f_j^{n+1} = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} f_{j-1}^n + \left(1 - \frac{2a\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) f_j^n + \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} f_{j+1}^n$$

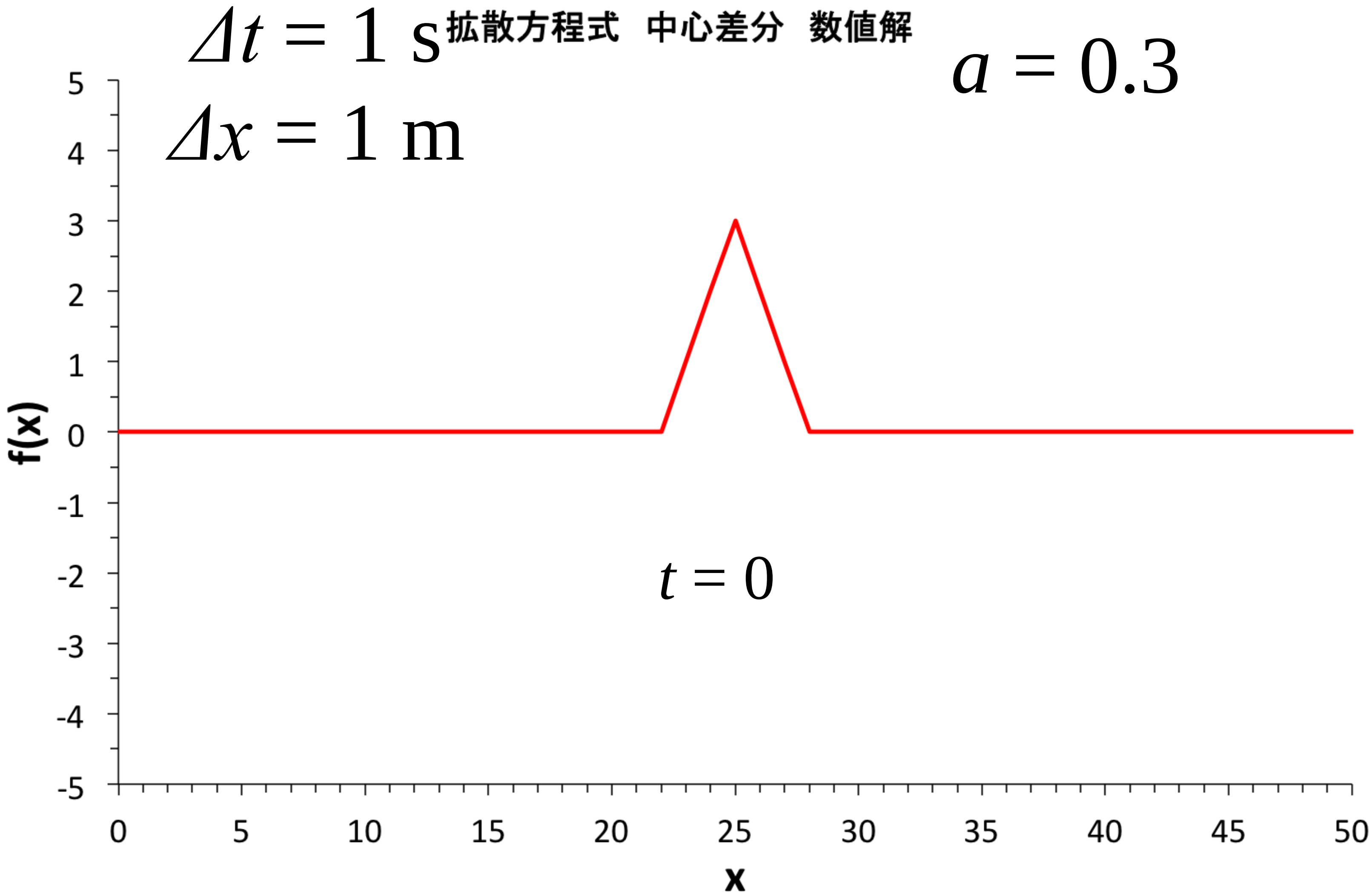


拡散方程式の差分解

$\Delta t = 1\ \mathrm{s}$

$\Delta x = 1\ \mathrm{m}$

$a = 0.3$



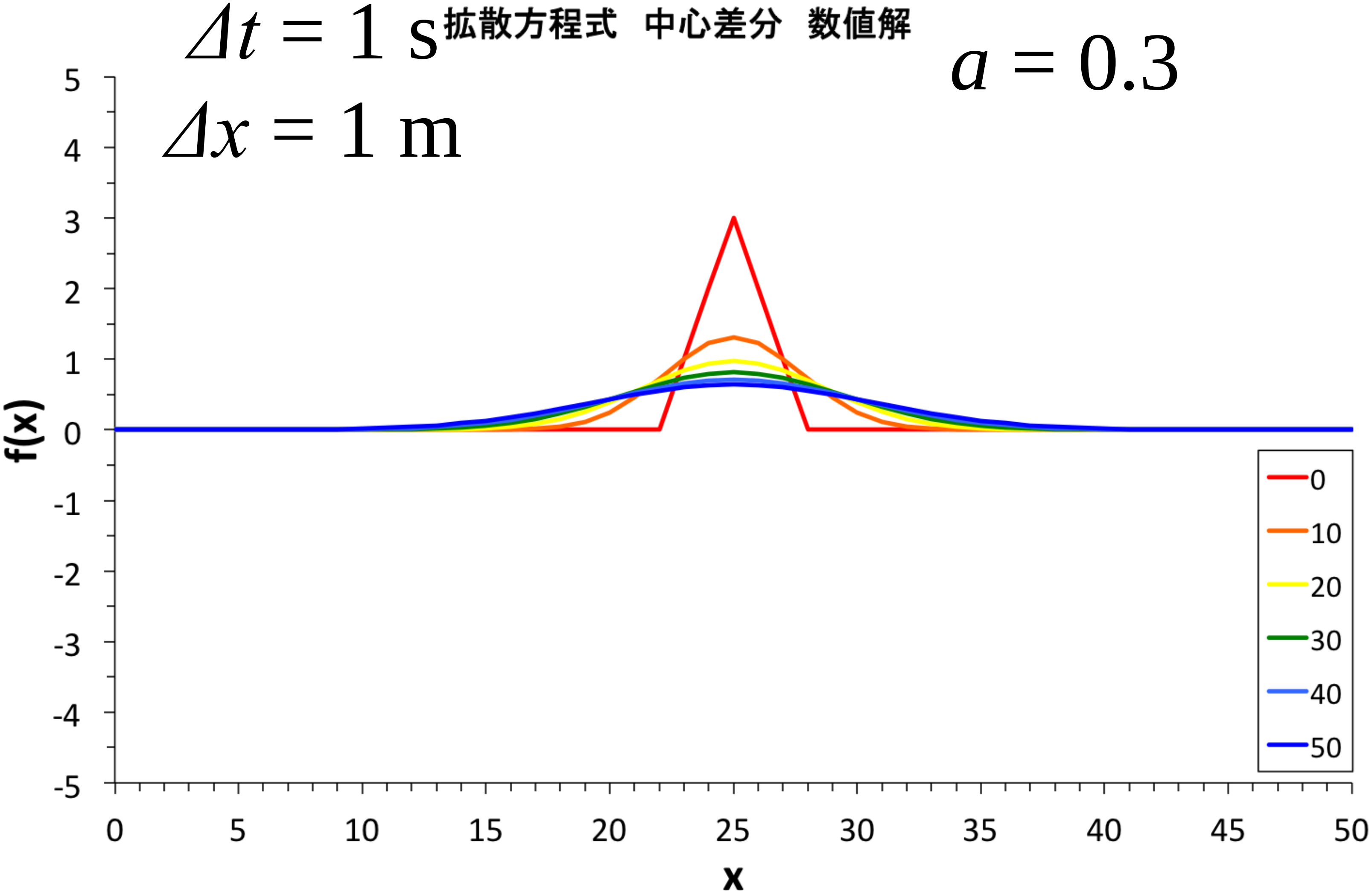
$t = 0$

拡散方程式の差分解

$\Delta t = 1\ \mathrm{s}$

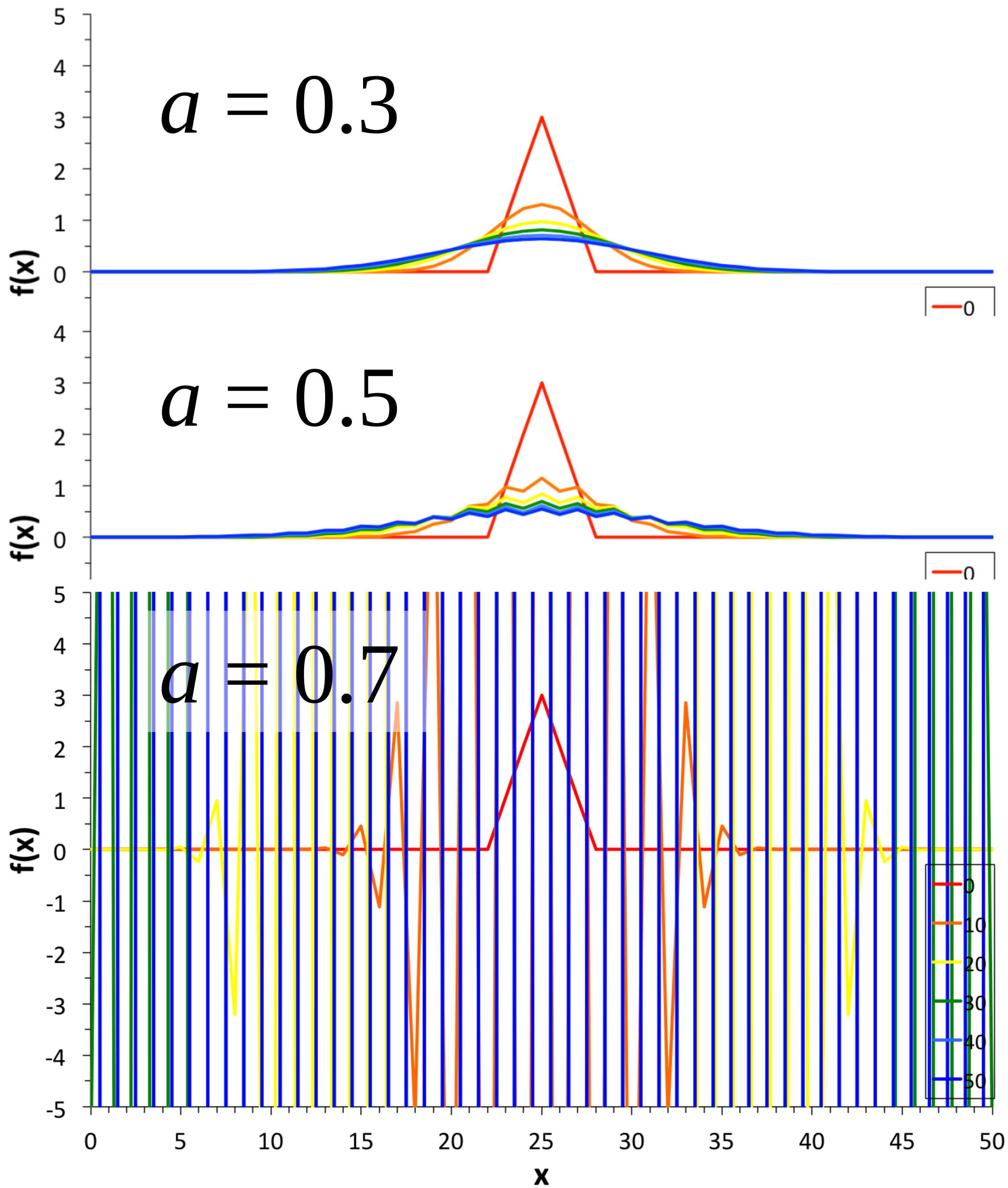
$\Delta x = 1\ \mathrm{m}$

$a = 0.3$



拡散方程式の差分解

- 拡散方程式の差分解についても、計算条件によっては数値計算の結果が安定せず、計算が破綻してしまう



安定性解析

- 差分近似などによる離散化によって、大気要素の時々刻々の状態を求めることができる
- しかし、これまで見てきたように、時間発展の過程で数値的な不安定が発生し、計算が破綻してしまうことがある
- 計算条件が数値的な不安定を起こしやすいかどうかのチェック

フーリエ級数

- 周期 $2l$ をもつ関数 $f(x)$ は、三角関数の和として表現できる

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

- オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を用いると

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp\frac{in\pi x}{l}$$

- 波数 $k = n\pi/l$ を用いて

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\exp(ikx)$$

フーリエ級数の直交性

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx=\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$=\begin{bmatrix}a_0 & m=0\\ 0 & m\neq 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_m & m=n\\ 0 & m\neq n\end{bmatrix}+b_m\times 0$$

$$\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$=a_m\times 0+\begin{bmatrix}b_m & m=n\\ 0 & m\neq n\end{bmatrix}$$

ノイマン法

- 変数 $f\,(x,\,t)$ を、空間方向についてフーリエ変換すると

$$f\,(x,t) = \sum_k A_k\,(t)\exp(ikx)$$

- ノイマン（von Neumann）の安定条件：
時間発展とともにあらゆる波数 k の振幅 $A_\mathrm{k}(t)$ が増幅しないこと

ノイマン法

- 差分点($x_j = j\Delta x,\ t_n = n\Delta t$)における f の値 f_j^n を

$$f_j^n = A^n \exp(i\,k\,j\Delta x)$$

i; 虚数
k; 波数

とおき、$A = A^{n+1} / A^n$ の大きさを求めて以下のように判別する

$$|A| = \begin{cases} \leq 1 & \cdots 安定 \\ > 1 & \cdots 不安定 \end{cases}$$

全ての k について安定なら、無条件安定

拡散方程式の安定性

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- 拡散方程式の差分形式

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = a\frac{f_{j-1}^n - 2f_j^n + f_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

についてフーリエ変換を適用し、安定性を調べる。波数 k の振幅の式は

$$\frac{A^{n+1} - A^n}{\Delta t} = 2a\frac{\cos(k\Delta x) - 1}{(\Delta x)^2}A^n$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$A = \frac{A^{n+1}}{A^n} = 1 - \frac{4a\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k\Delta x}{2}$$

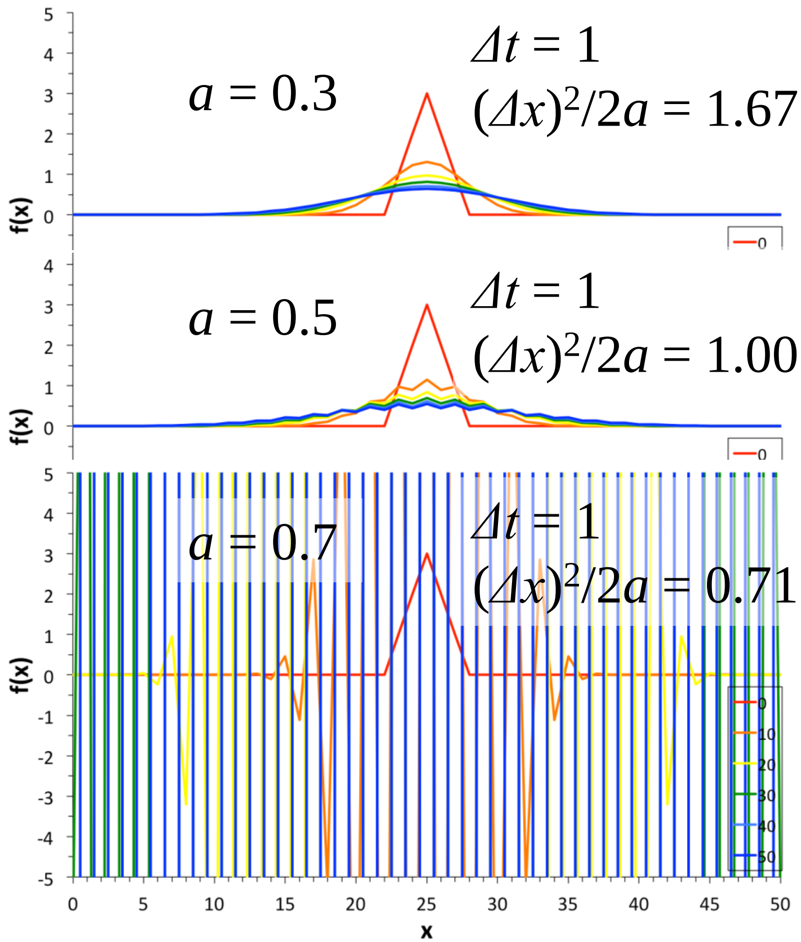
拡散方程式の安定性

- 安定条件は $|A| \le 1$ であるから

$$-1 \le 1 - \frac{4a\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k\Delta x}{2} \le 1$$

- 結局、あらゆる波数 k について安定となる条件は

$$\Delta t \le \frac{(\Delta x)^2}{2a}$$



移流方程式の安定性

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial x}$$

- 陽解法、中心差分での移流方程式の差分形式

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = -c\frac{-f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2\Delta x}$$

についての波数 k の振幅の式は

$$\frac{A^{n+1} - A^n}{\Delta t} = -ic\frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x}A^n$$

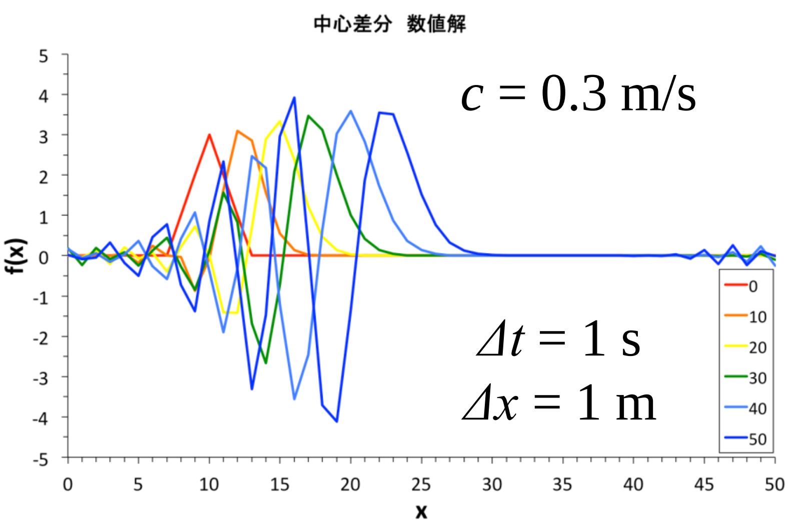
$$A = \frac{A^{n+1}}{A^n} = 1 - i\frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin(k\Delta x)$$

移流方程式の安定性

- 振幅の大きさ $|A|$ は

$$|A| = \sqrt{1 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x)} > 1$$

となり、従って、陽解法、中心差分による移流方程式の差分解法は、無条件不安定である



移流方程式の安定性

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial x}$$

- 陽解法、風上差分での移流方程式の差分形式

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = -c\frac{-f_{j-1}^n + f_j^n}{\Delta x}$$

についての波数 k の振幅の式は

$$\frac{A^{n+1} - A^n}{\Delta t} = -c\frac{\{1-\cos(k\Delta x)\} + i\sin(k\Delta x)}{\Delta x} A^n$$

$$A = \frac{A^{n+1}}{A^n} = \left[1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\{1-\cos(k\Delta x)\}\right] - i\frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin(k\Delta x)$$

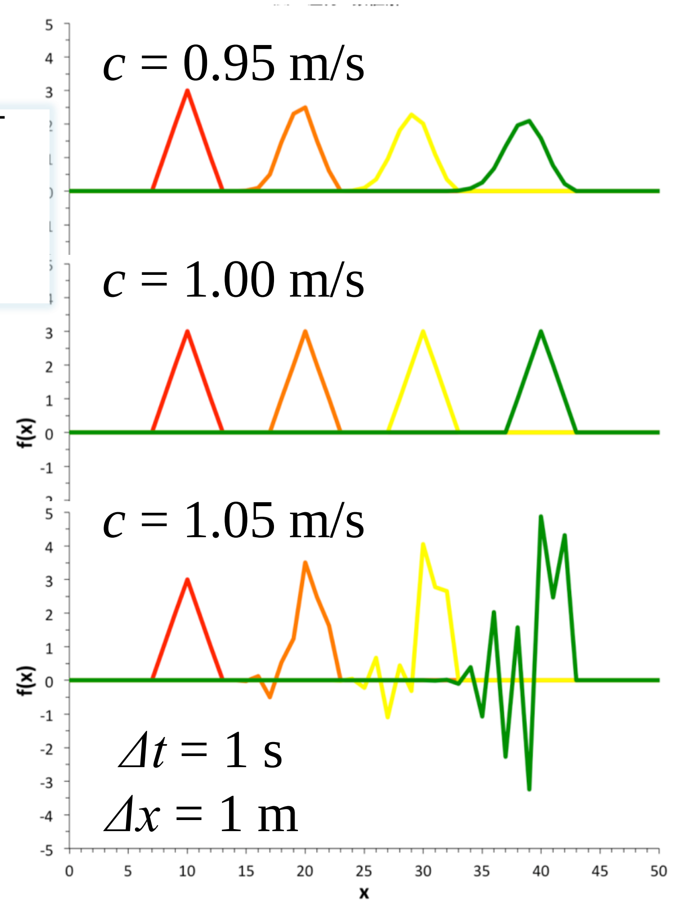
移流方程式の安定性

- 振幅の大きさ $|A|$ は

$$|A| = \sqrt{\left[1-\frac{c\Delta t}{\Delta x}\{1-\cos(k\Delta x)\}\right]^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x)}$$

従って、陽解法、風上差分による移流方程式の差分解法は、条件に従って安定性が変わる

- クーラン数： $C = c\Delta t / \Delta x$
情報伝達距離と格子幅の比。
一般に、$C \leq 1$ は計算安定性の必要条件（CFL条件）



CFL条件

- クーラン（Courant）数： $C = c\Delta t / \Delta x$
  → 情報伝達距離（$c\Delta t$）と格子幅（Δx）の比。
- 一般に、$C \leq 1$ は計算安定性の必要条件。これは $\Delta x / \Delta t \geq c$ であり、「情報が伝播する速さ」が「実際の現象の進む速さ」以上でなければならないことを示す。この条件をCFL（Courant-Friedrichs-Lewy）条件という

これまでは時間変動だけの振動であった

1次元進行波　ー時間 t と距離 xー　の記述の仕方を眺める

- 1次元波動の記述の仕方

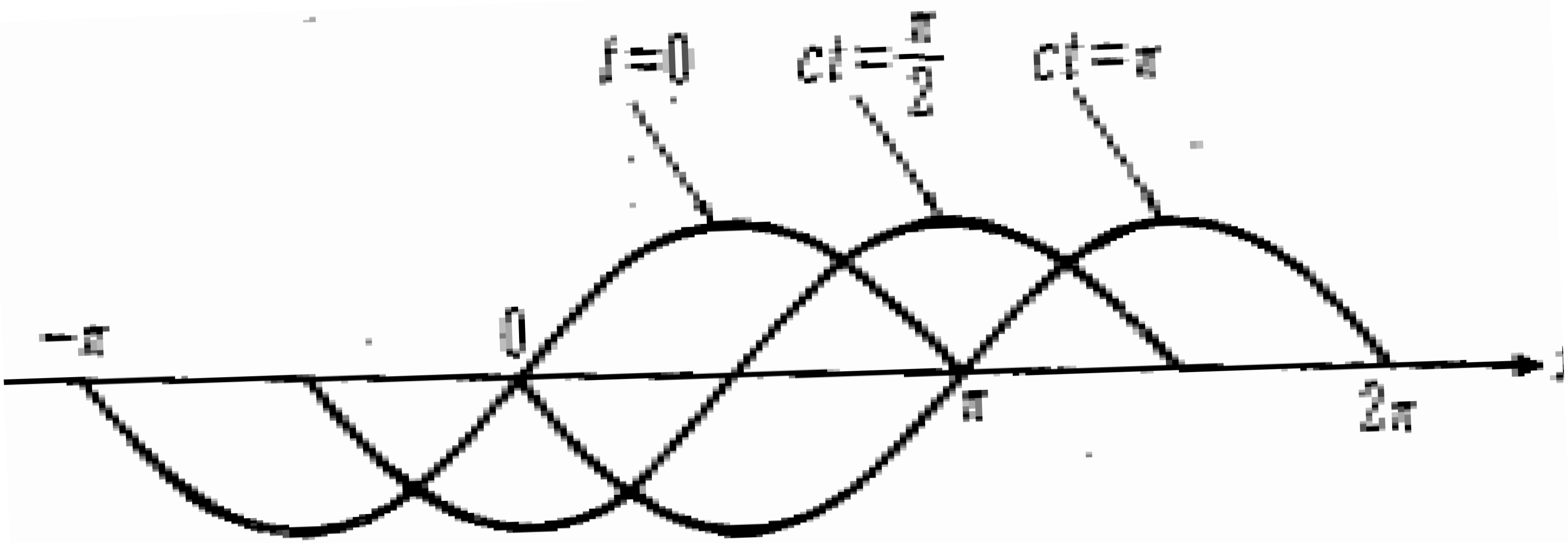
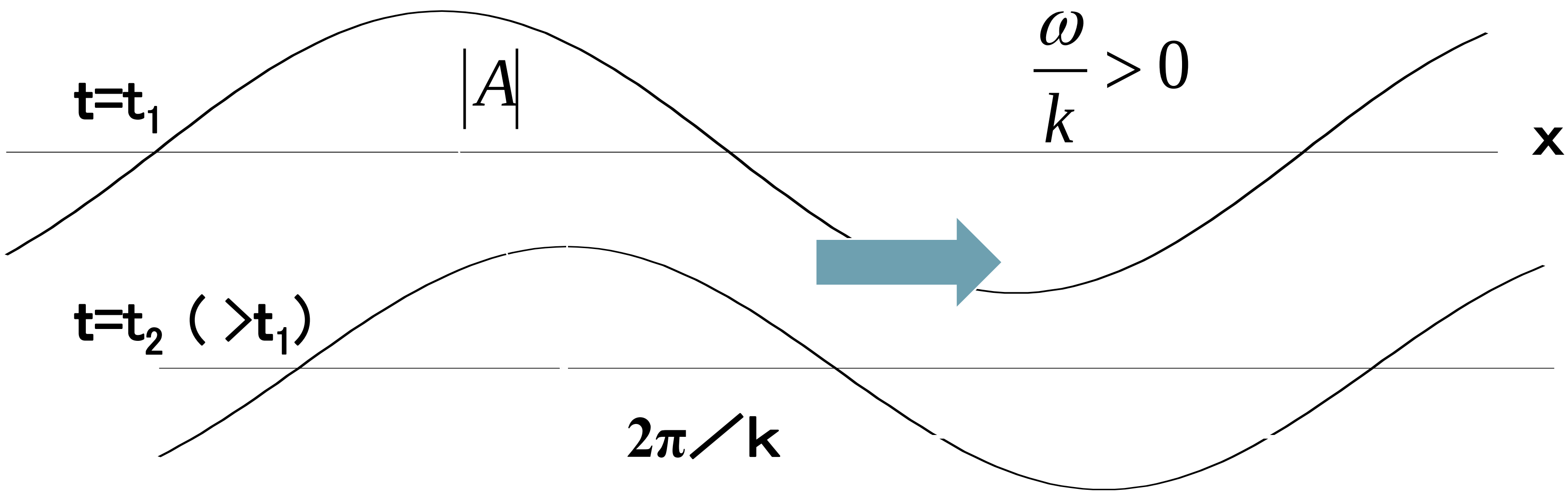


図2.3　x の正の方向に位相速度 c で伝播している三角関数型の波.



$$\eta = |A|\cos(kx - \omega t + \delta) \ where |A|^2 = A_r^2 + A_i^2, \tan\delta = \frac{A_i}{A_r}$$

$$\eta = \sin\left\{\left(k_0 + \frac{1}{2}\Delta k\right)x - \left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right\}$$

$$+\sin\left\{\left(k_0 - \frac{1}{2}\Delta k\right)x - \left(\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right\}$$

$$= 2\sin(k_0\, x - \omega_0\, t)\cos(\Delta k\, x - \Delta\omega t)$$

$k_0 >> \Delta k$

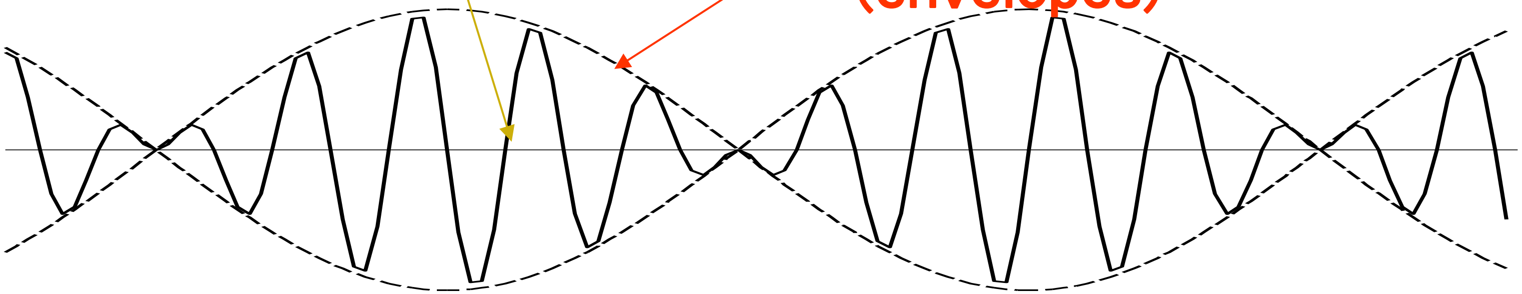
$\omega_0 >> \Delta\omega$

搬送波

（carrier waves）

包絡線　→　振幅を表しエネルギーに関係する

（envelopes）



仮定

$$k_0 >> \Delta k$$

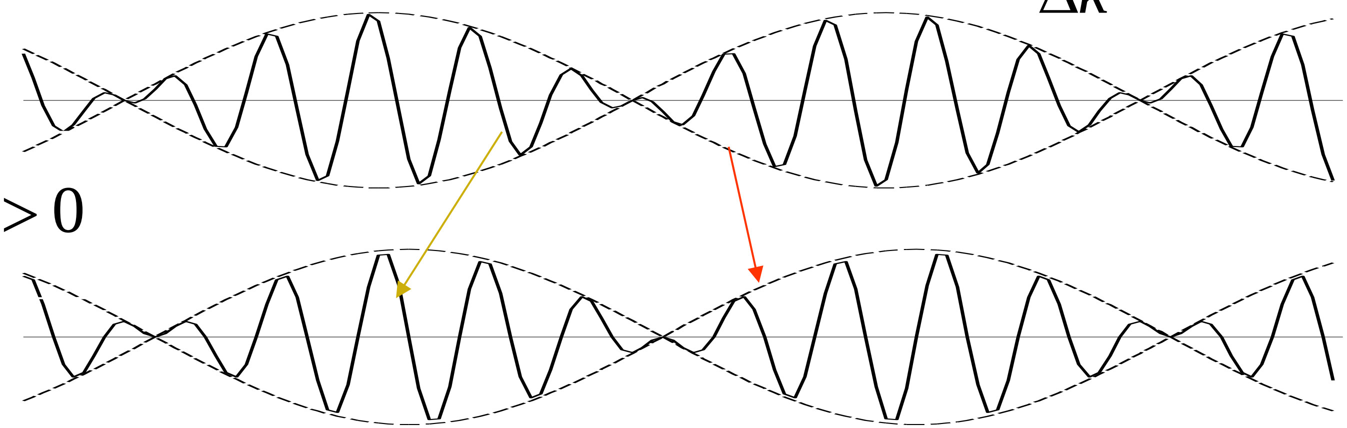
$$\omega_0 >> \Delta\omega$$

○二つの速度が定義される: $\dfrac{\omega_0}{k_0}$:位相速度

$\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$:群速度

t=t_1

$$\frac{\omega_0}{k_0} < 0, \frac{\Delta\omega}{\Delta k} > 0$$



t=t_2

○ 複数の波動の重ね合わせ:ω=f(k): 分散関係

$\dfrac{\omega}{k} =$ kに依存しない・・・・・非分散

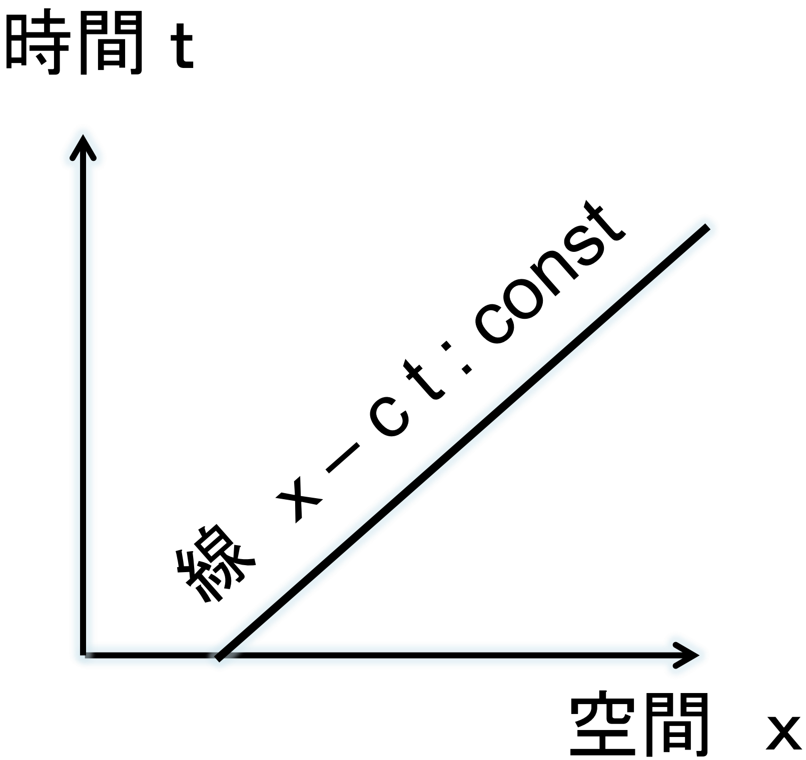
kに依存する・・・・・・・分散性がある

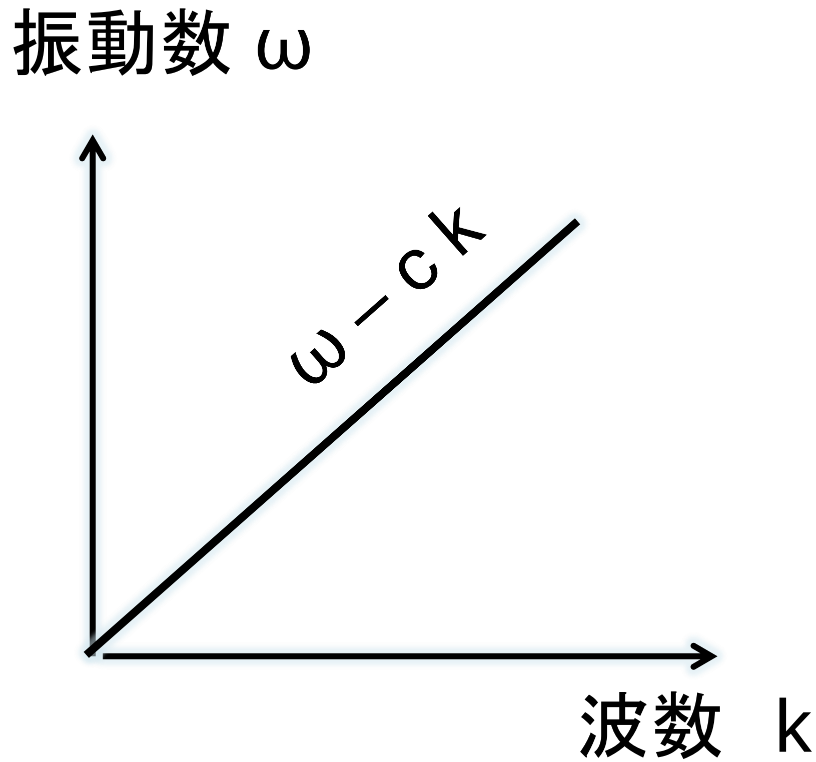
$\boxed{c_{gx} = \dfrac{d\,\omega}{d\,k}:}$ 群速度(エネルギーの速度) $\neq$ $\boxed{\dfrac{\omega}{k} \equiv c_x}$:位相速度

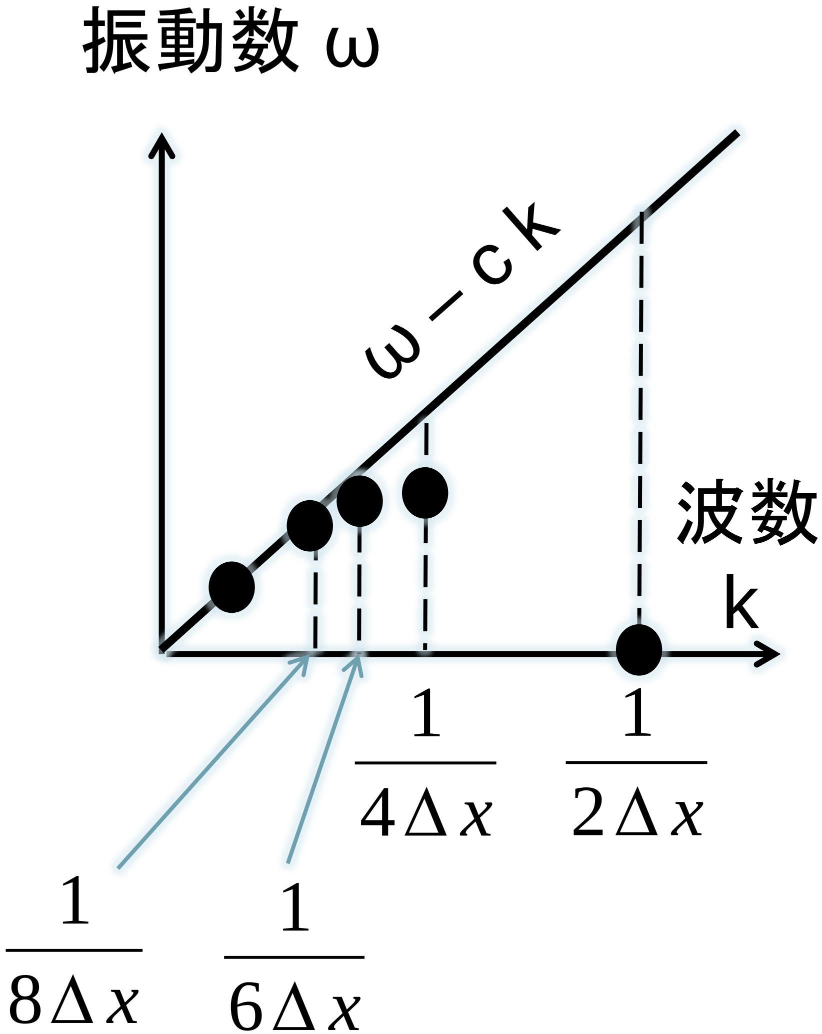
移流項

$$\frac{\partial F}{\partial t} + c\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\mathrm{F} \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega \mathrm{t} - kx)}$$

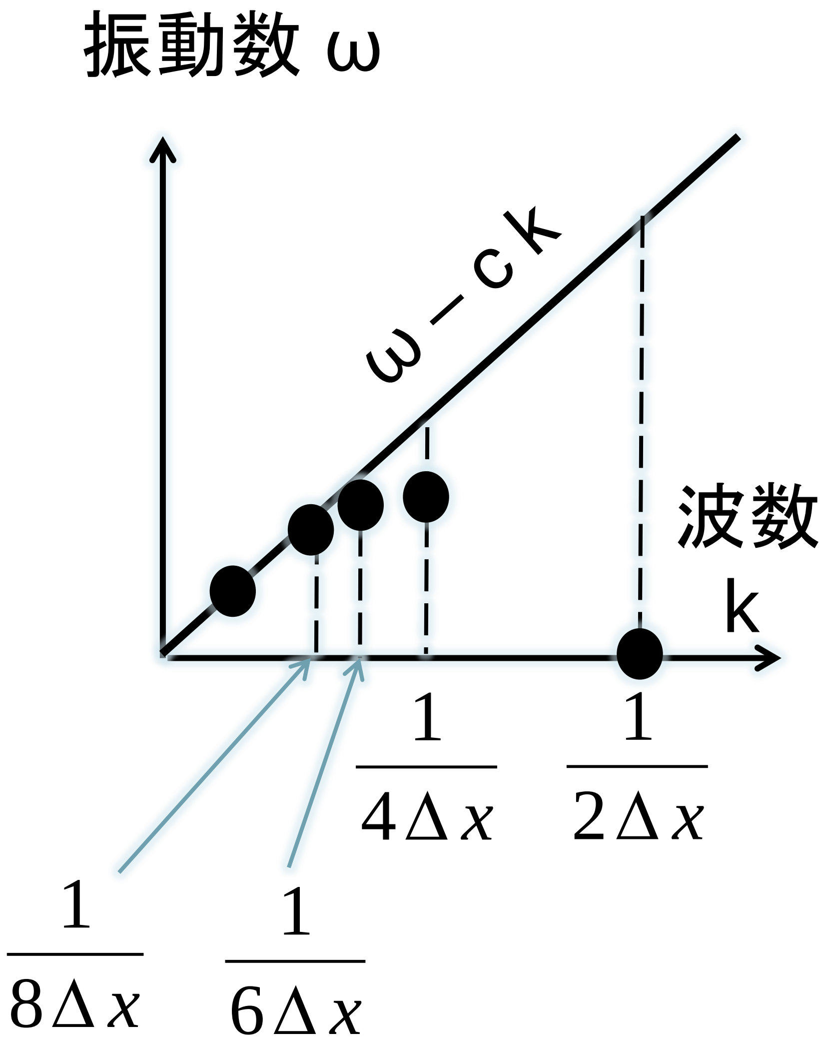






物理的には、位相速度はc、および群速度もcと、波数kによらず一定値である。

格子では、小さな波数（大きな水平スケール）は位相速度も群速度も物理的なものと一致するが、大きい波数（小さい水平スケール）は、特に2格子スケールでは位相速度は0で群速度は逆に向いてしまう。



物理的にもっともらしい計算を狙うならば、格子スケールの数倍以上で現象を解像できるようにする。

↓

格子モデルでは格子サイズのじょう乱が出てくるが、それらの増幅を常にフィルターする努力が必要である。

まとめ

- 移流の差分スキーム：
  ＊中央差分は分散性、風上差分は拡散性をもつ
  ＊条件に従って安定性は変わる
  ＊クーラン数：$C = c\Delta t / \Delta x$
  情報伝達距離と格子幅の比。一般に、$C \le 1$ は計算安定性の必要条件（CFL条件）

- 拡散の差分スキーム：
  ＊aを拡散係数とすると、安定条件は $\Delta t \le \frac{(\Delta x)^2}{2a}$

- ほかにもモデルの持つ波動を考慮する必要がある