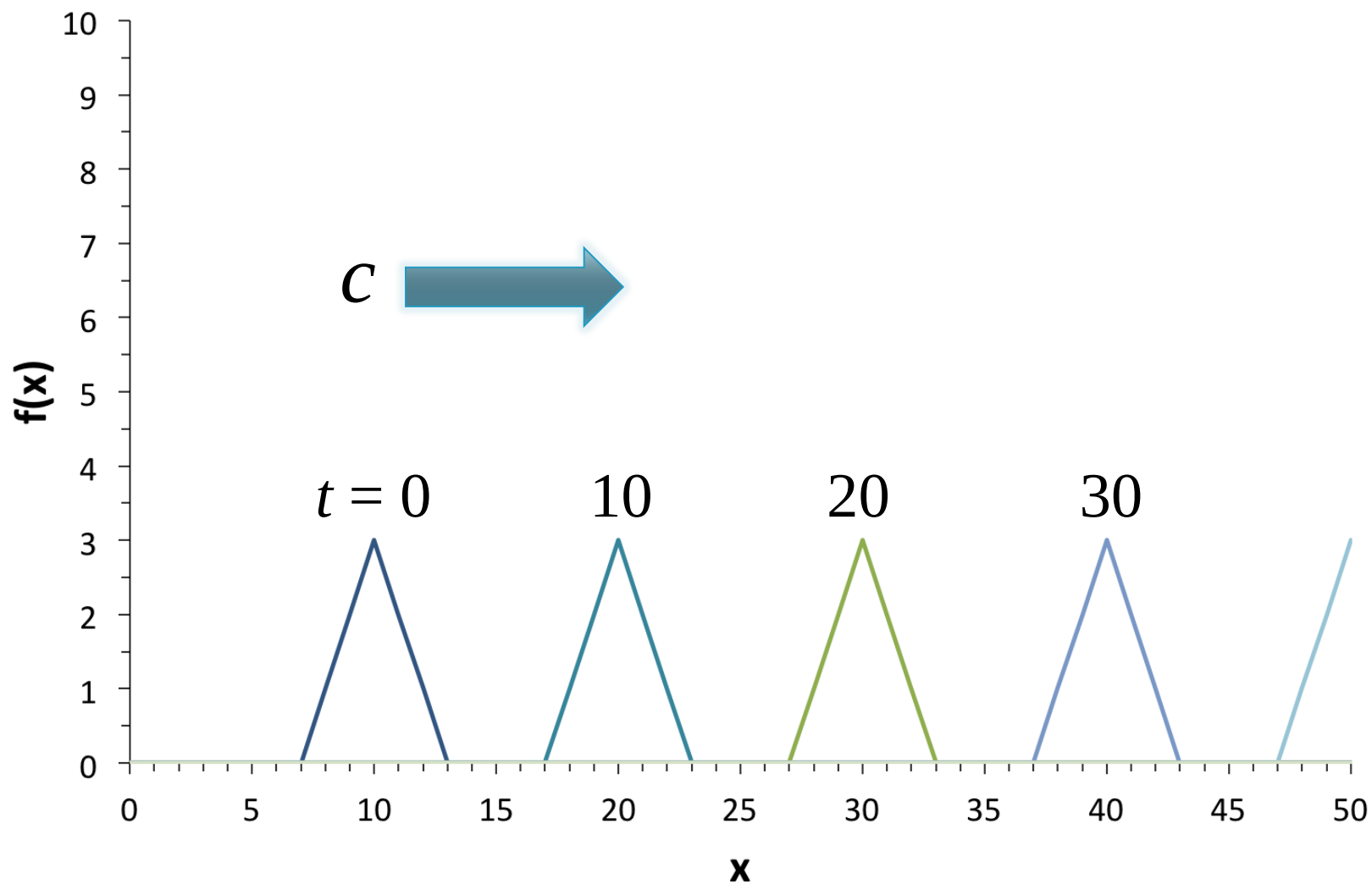


線形移流方程式の厳密解



線形移流方程式の差分近似

- 時間微分については、陽解法を採用

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}$$

- 空間微分に中心差分を用いると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{j-\frac{1}{2}}^n + f_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}$$

- $f_{j\pm 1/2}$ の補間を $f_{j\pm \frac{1}{2}}^n = \frac{f_j^n + f_{j\pm 1}^n}{2}$ とすると、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2\Delta x}$$

線形移流方程式の差分近似

◎ 線形移流方程式

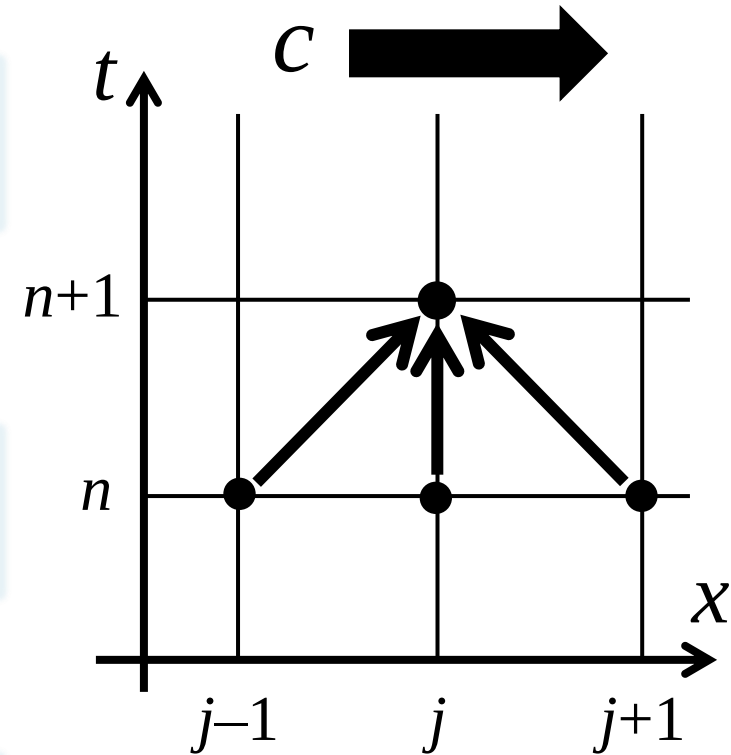
$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

を中心差分で差分近似すると、

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + c \frac{-f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2\Delta x} = 0$$

整理すると、

$$f_j^{n+1} = \frac{c\Delta t}{2\Delta x} f_{j-1}^n + f_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} f_{j+1}^n$$



初期条件・境界条件

- ◎ 今回の例では、 x 方向に等間隔に50格子とする。 $\Delta x = 1 \text{ m}$ 、 $\Delta t = 1 \text{ s}$ とする
- ◎ 初期条件

$$f(x) = \begin{cases} x - 7 (7 \leq x \leq 10) \\ -x + 13 (10 < x \leq 13) \\ 0 (x < 7, 13 < x) \end{cases}$$

- ◎ 境界条件は周期境界条件とする

$$f_{51} = f_0$$

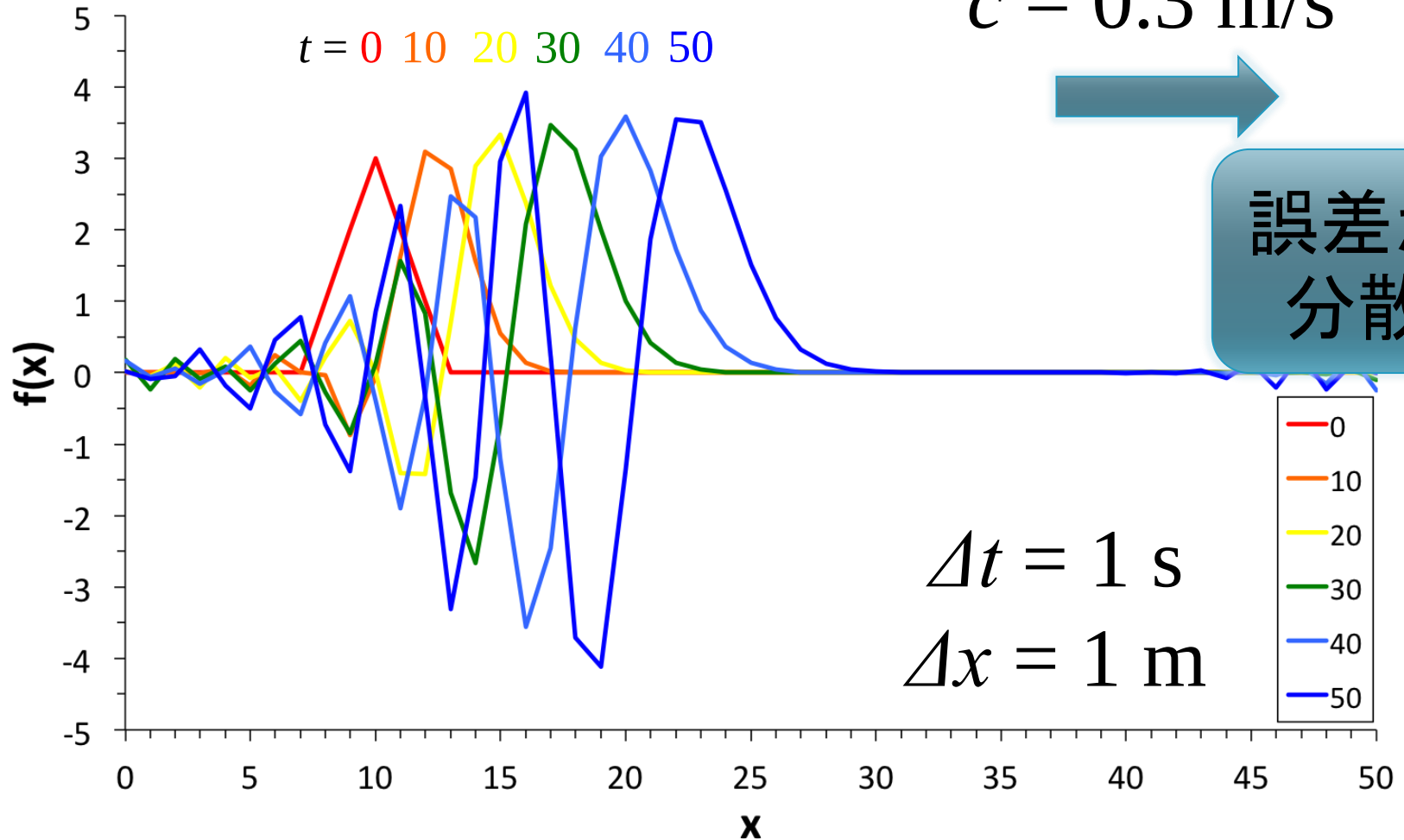
差分解の例(中心差分)

中心差分 数値解

$$c = 0.3 \text{ m/s}$$



誤差が
分散



別の差分近似

- 時間微分は同様に、陽解法を採用

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}$$

- 空間微分は風上側の格子点を採用した片側差分を用いると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{j-1}^n + f_j^n}{\Delta x}$$

- 上記のような風上（上流）側の点のみ使う差分形式を風上（上流）差分という

別の差分近似

◎ 線形移流方程式

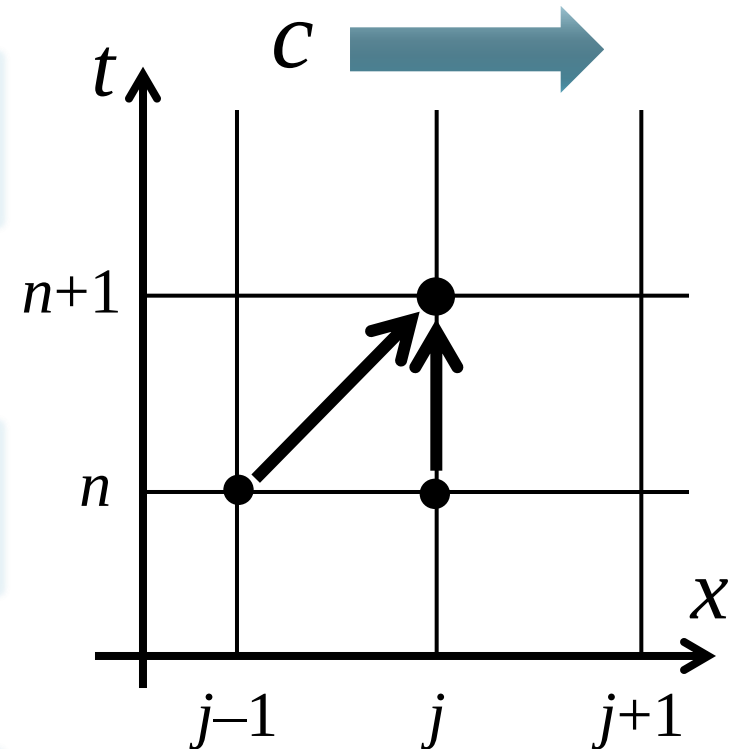
$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

を風上差分で差分近似すると、

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + c \frac{-f_{j-1}^n + f_j^n}{\Delta x} = 0$$

整理すると、

$$f_j^{n+1} = \frac{c\Delta t}{\Delta x} f_{j-1}^n + \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) f_j^n$$



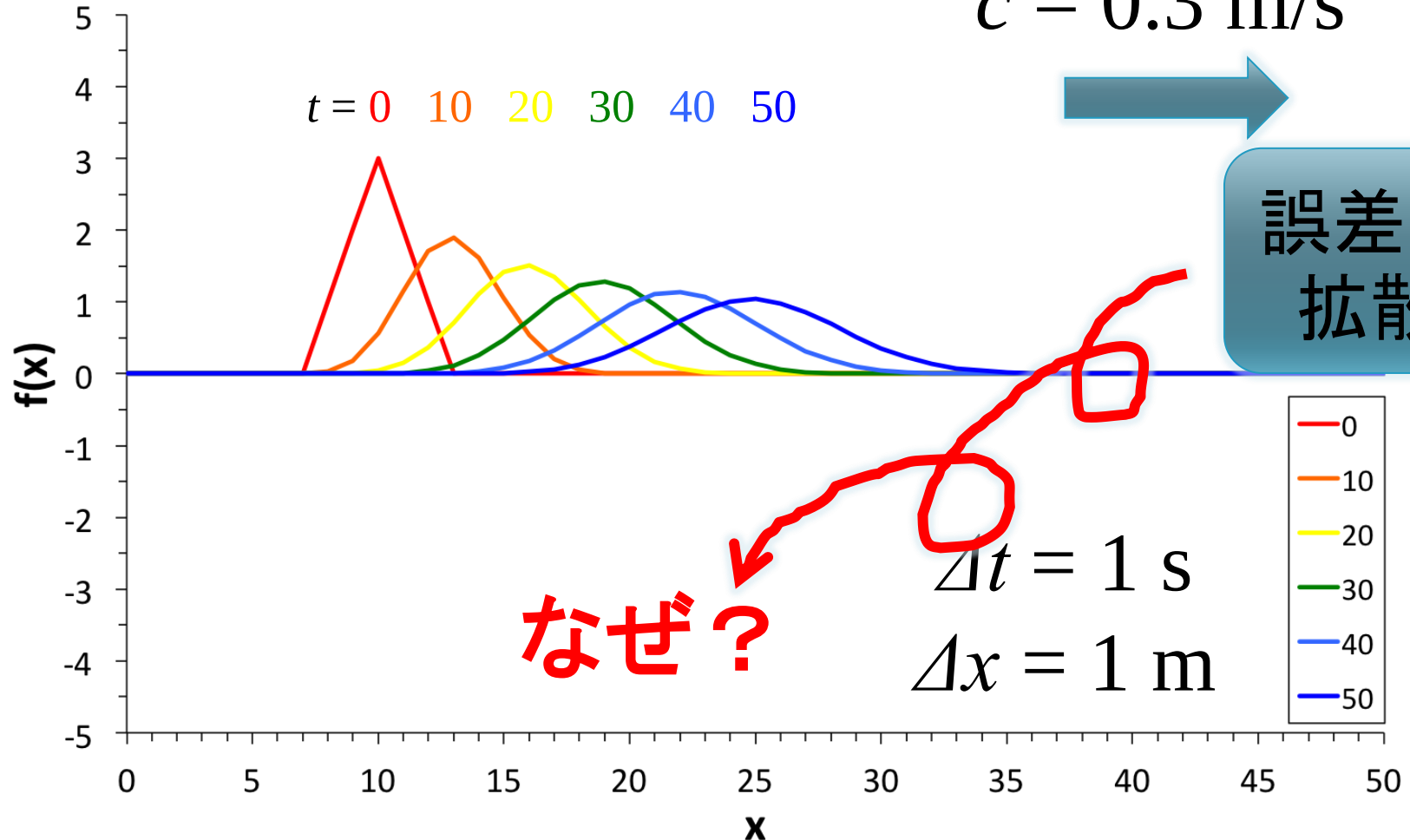
差分分解の例(風上差分)

風上差分 数値解

$$c = 0.3 \text{ m/s}$$



誤差が
拡散



$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_j &= \begin{cases} -c \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} & \text{for } c > 0 \\ -c \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} & \text{for } c < 0 \end{cases} \\
&= -\frac{1}{2}(c + |c|) \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} - \frac{1}{2}(c - |c|) \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} \\
&= -c \frac{f_j - f_{j-1} + f_{j+1} - f_j}{2\Delta x} + |c| \frac{-f_j + f_{j-1} + f_{j+1} - f_j}{2\Delta x} \\
&= -c \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} + |c| \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{2\Delta x} \\
&\rightarrow -c \frac{\partial f}{\partial x} + |c| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

風上差分は、移流(中央)差分と拡散差分を含んでいる！

離散化誤差の振る舞い

◎ 中心差分近似

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{6} f_j''' + \dots$$



分散的

打ち切り誤差の主要項は奇数次の微分係数

◎ 風上差分近似

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{j-1}^n + f_j^n}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} f_j'' + \dots$$

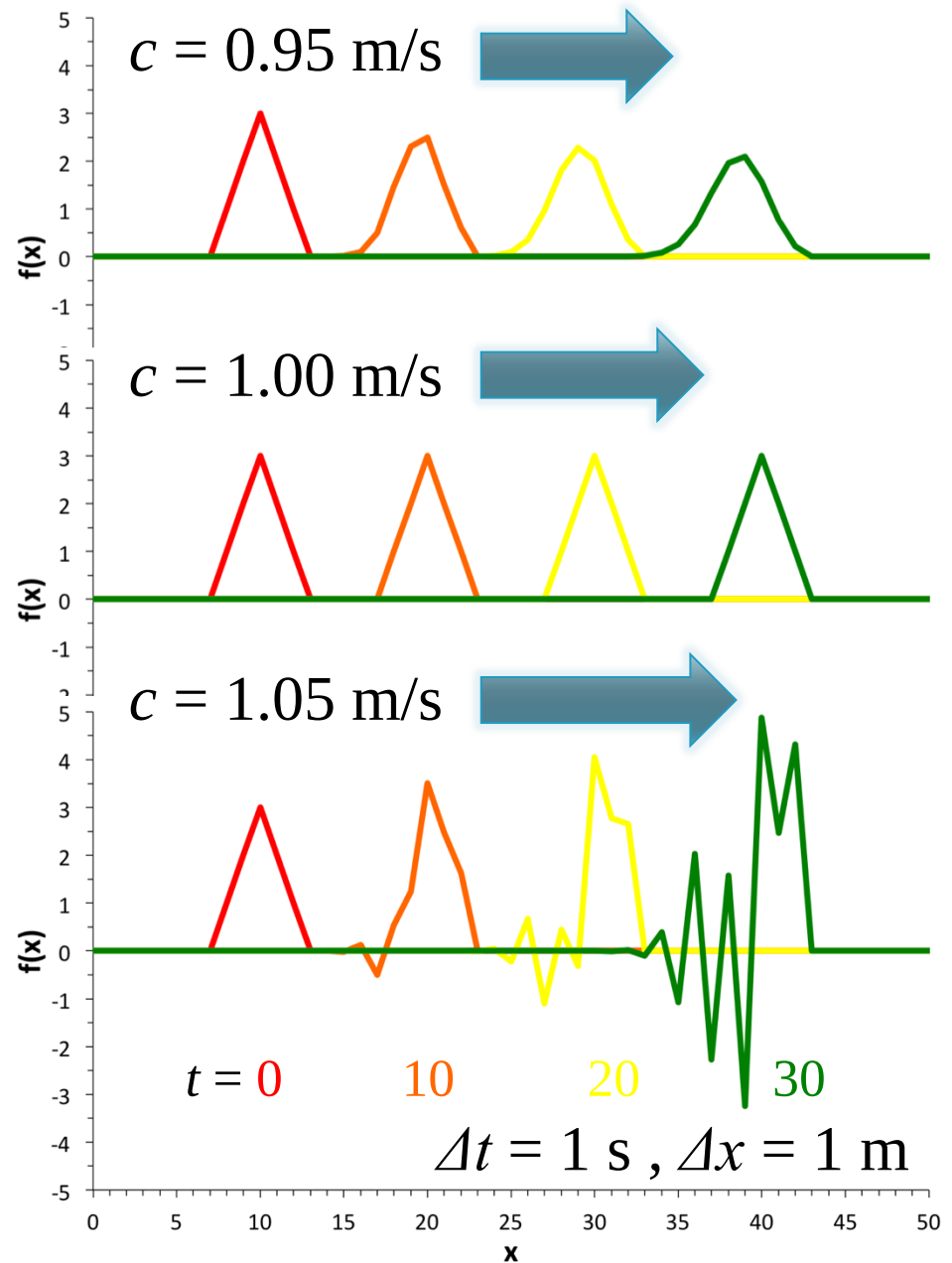


拡散的

打ち切り誤差の主要項は偶数次の微分係数

誤差の振舞い

- ◎ 同じ風上差分でも、計算条件によって計算誤差の時間発展の様子が異なっている
- ◎ 右の例では、 $c > 1$ のとき誤差が増幅しているが、 $c \leq 1$ では増幅せず



以上が
前回までの話

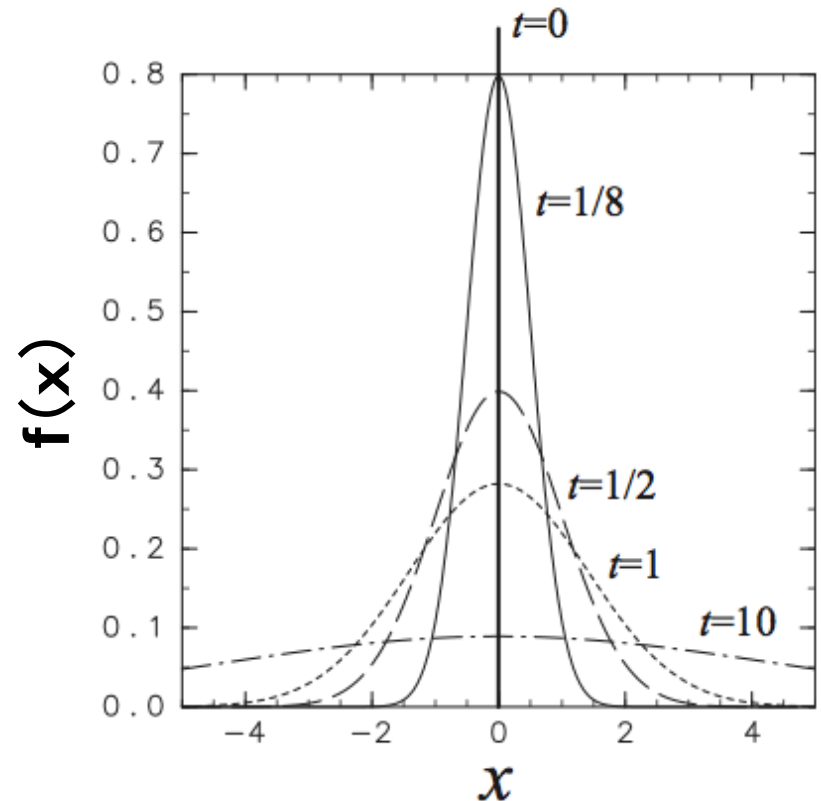
拡散方程式

● 拡散方程式

$a (\geq 0)$ は拡散係数で定数とする

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- 拡散方程式の解は、上に凸 ($\partial^2 f / \partial x^2 < 0$) のところで減少 ($\partial f / \partial t < 0$) し、下に凸 ($\partial^2 f / \partial x^2 > 0$) のところで増加 ($\partial f / \partial t > 0$) するので、分布を平滑化させる解となる



拡散方程式の厳密解

$a(\geq 0)$ は拡散係数で定数とする

問題: x 方向には周期的と仮定する

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f(x, t) = H(t) \sin kx$$

$$H(0) = 1 \quad \text{at} \quad t = 0$$

解: $\frac{dH}{dt} = -ak^2 H \quad b = -ak^2$

$$H = Ae^{-bt} \Rightarrow H = e^{-bt}$$

$$f(x, t) = e^{-bt} \sin kx$$

拡散方程式の差分近似

◎ 拡散方程式

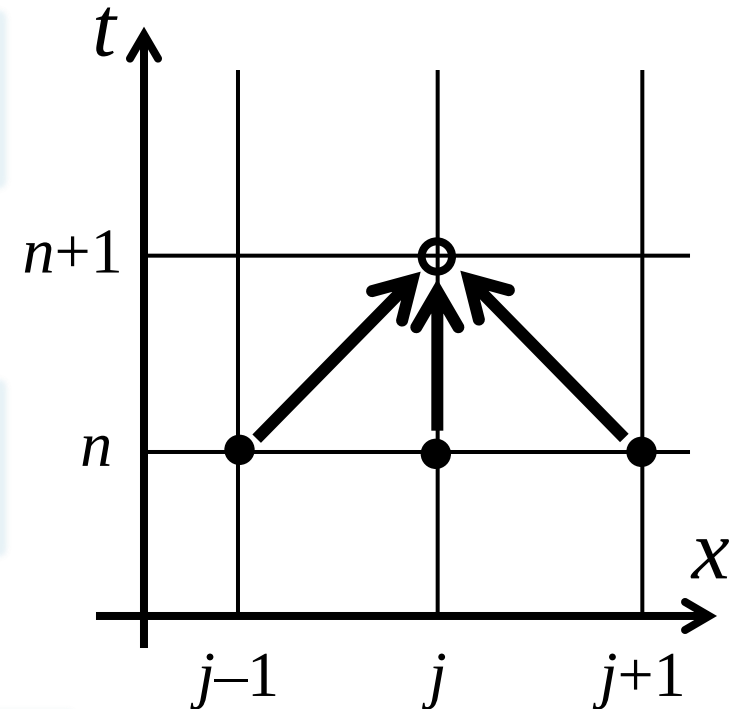
$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

を中心差分で差分近似すると、

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = a \frac{f_{j-1}^n - 2f_j^n + f_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

整理すると、

$$f_j^{n+1} = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} f_{j-1}^n + \left(1 - \frac{2a\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) f_j^n + \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} f_{j+1}^n$$

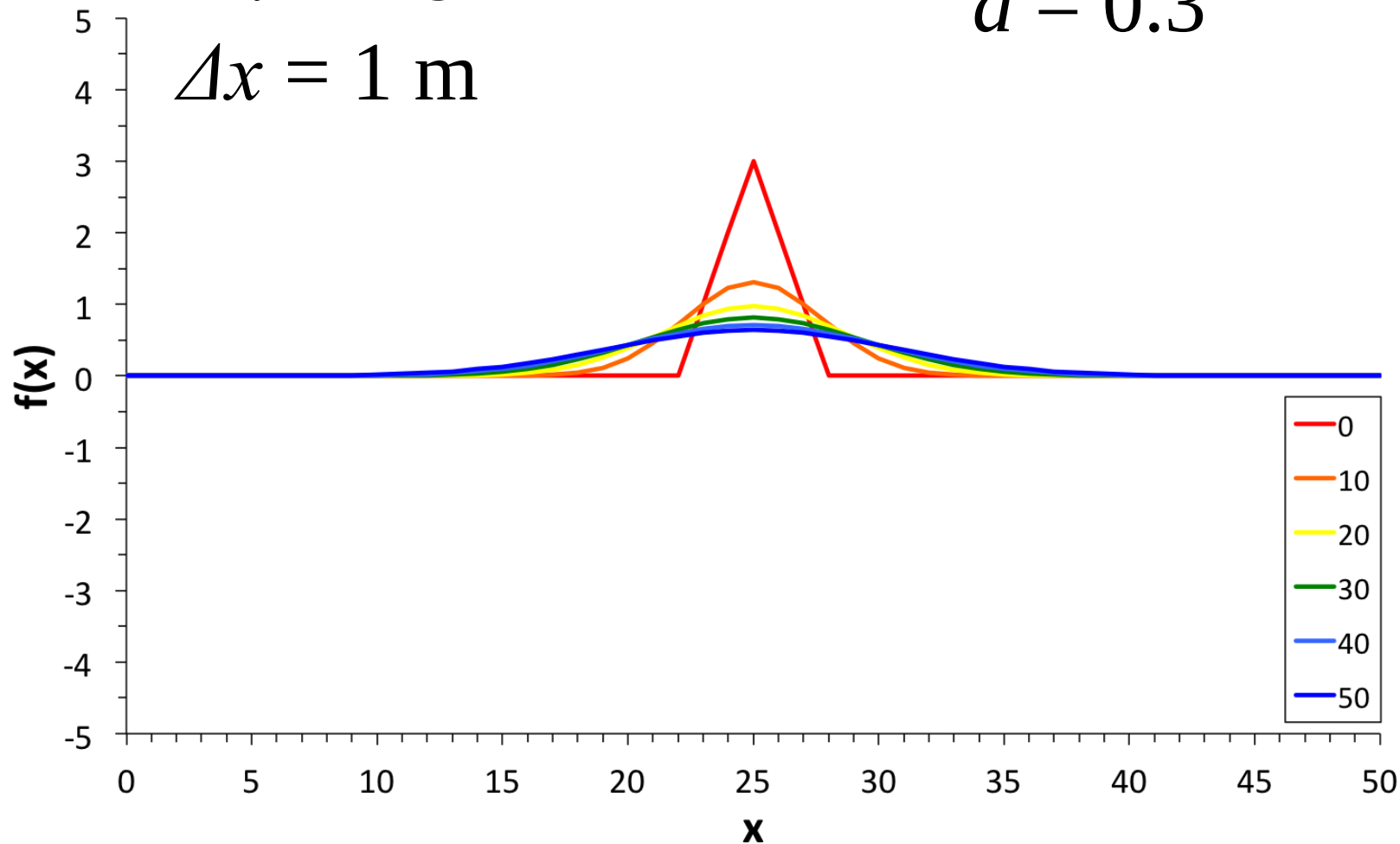


拡散方程式の差分解

$\Delta t = 1$ s 拡散方程式 中心差分 数値解

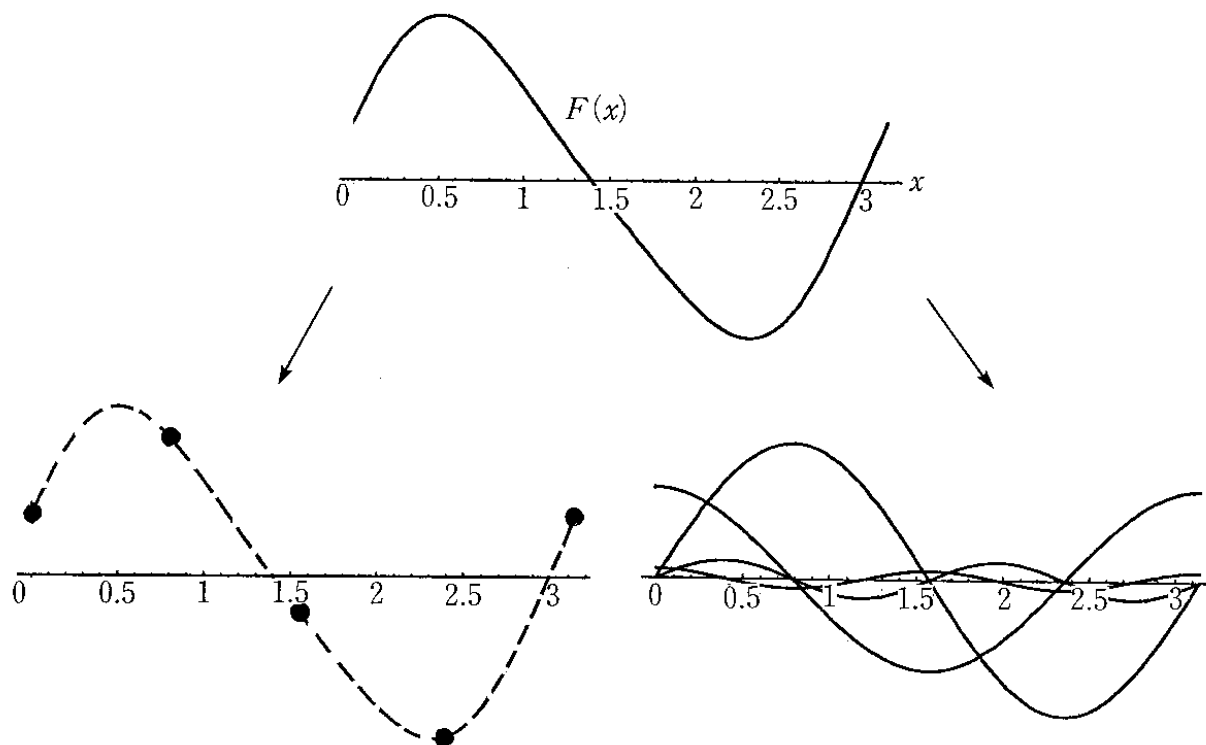
$a = 0.3$

$\Delta x = 1$ m



安定性解析

- ◎ 差分近似などによる離散化によって、大気要素の時々刻々の状態を求めることができる
- ◎ しかし、これまで見てきたように、時間発展の過程で数値的な不安定が発生し、計算が破綻してしまうことがある
- ◎ 計算条件が数値的な不安定を起こしやすいかどうかのチェック



(a) 1次元の場合の格子点法
実線のような分布をする変数 $F(x)$ を
黒丸の値で近似する。

(b) スペクトル法の場合
図のように $F(x)$ を基底関数に分解し、
各々の振幅のセットで $F(x)$ を近似する。

図 1-1 格子点法とスペクトル法

フーリエ級数

- 周期 $2l$ をもつ関数 $f(x)$ は、三角関数の和として表現できる

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

- オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いると

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \frac{in\pi x}{l}$$

- 波数 $k = n\pi/l$ を用いて

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikx)$$

フーリエ級数の直交性

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx &= \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) dx \\ &= \begin{bmatrix} a_0 & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_m & m=n \\ 0 & m \neq n \end{bmatrix} + b_m \times 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx &= \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) dx \\ &= a_m \times 0 + \begin{bmatrix} b_m & m=n \\ 0 & m \neq n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ノイマン法

- ◎ 変数 $f(x, t)$ を、空間方向についてフーリエ変換すると

$$f(x, t) = \sum_k A_k(t) \exp(ikx)$$

- ◎ ノイマン (von Neumann) の安定条件:
時間発展とともにあらゆる波数 k の振幅 $A_k(t)$ が増幅しないこと

ノイマン法

- ◎ 差分点 ($x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$) における f の値 f_j^n を

$$f_j^n = A^n \exp(ikj\Delta x)$$

とおき、 $A = A^{n+1} / A^n$ の大きさを求めて以下のように判別する

$$|A| = \begin{cases} \leq 1 & \dots \text{安定} \\ > 1 & \dots \text{不安定} \end{cases}$$

全ての k について安定なら、無条件安定

拡散方程式の安定性

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

● 拡散方程式の差分形式

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = a \frac{f_{j-1}^n - 2f_j^n + f_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

についてフーリエ変換を適用し、安定性を調べる。波数 k の振幅の式は

$$\frac{A^{n+1} - A^n}{\Delta t} = 2a \frac{\cos(k\Delta x) - 1}{(\Delta x)^2} A^n$$

$$A = \frac{A^{n+1}}{A^n} = 1 - \frac{4a\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

拡散方程式の安定性

- 安定条件は $|A| \leq 1$ であるから

$$-1 \leq 1 - \frac{4a\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \leq 1$$

- 結局、あらゆる波数 k について安定となる条件は

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2a}$$

