離散化

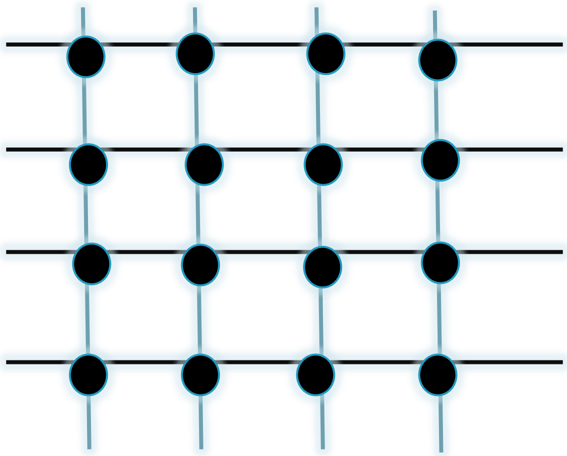
- 現実の大気の状態は、微分方程式によって表現される　→連続的

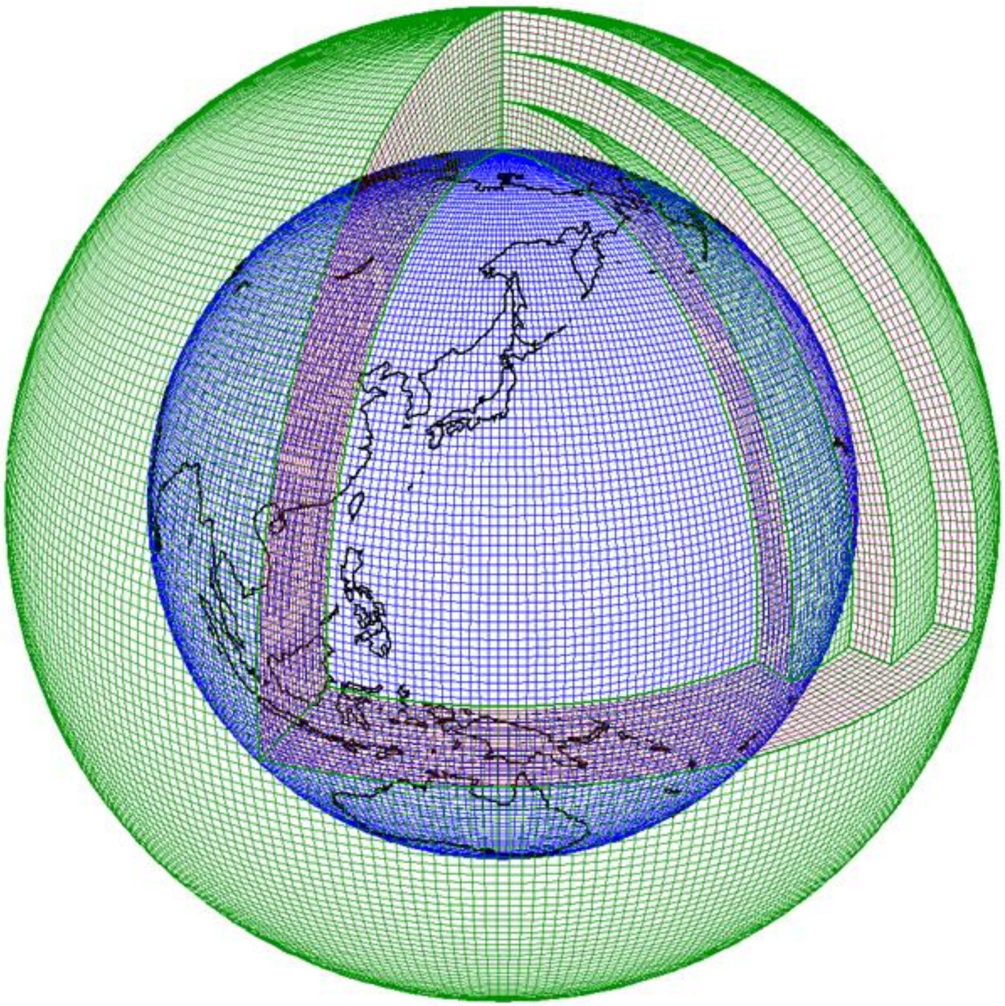
- コンピューターでは、連続的な情報を扱うことが非常に困難である

- 連続した値をとびとびの値に置き換えて、コンピューターで扱えるようにする　→離散化

格子点

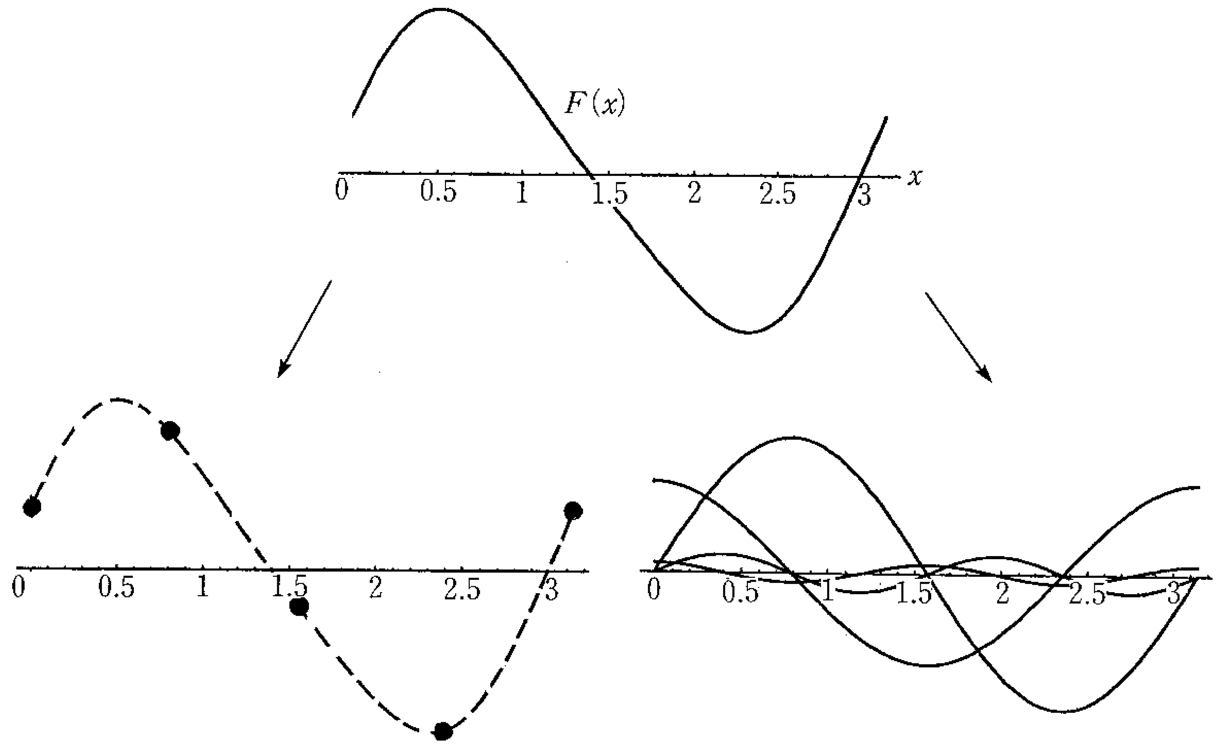
- コンピューターによる大気シミュレーションでは、大気を有限個の格子に分け、格子点上の気象要素を計算する





（有限）差分法

- 微分方程式を解く際、関数の2つの変数値に対してとる値を変数値の差で割った値（差分商）で微分を近似する方法



(a) 1次元の場合の格子点法
実線のような分布をする変数 $F(x)$ を黒丸の値で近似する.

(b) スペクトル法の場合
図のように $F(x)$ を基底関数に分解し，各々の振幅のセットで $F(x)$ を近似する.

図 1-1　格子点法とスペクトル法

テイラー展開

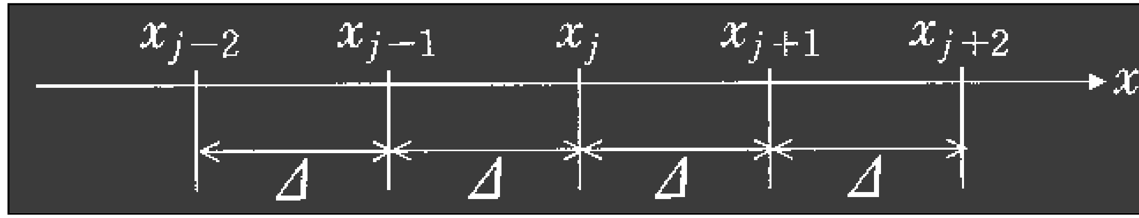
- 点 x 近傍でのテイラー展開は

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta x^m}{m!} f^{(m)}(x)$$

- 例えば、k 番目の点 x_k での値 $f_\mathrm{k} = f(x_\mathrm{k})$ を j 番目の点 x_j を基点として展開すると

$$f_k = f_j + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_k - x_j)^m}{m!} f_j^{(m)}$$

中心差分



- 等間隔 $\varDelta$ の格子において、$x_j = j\varDelta$ 近傍でのテイラー展開は

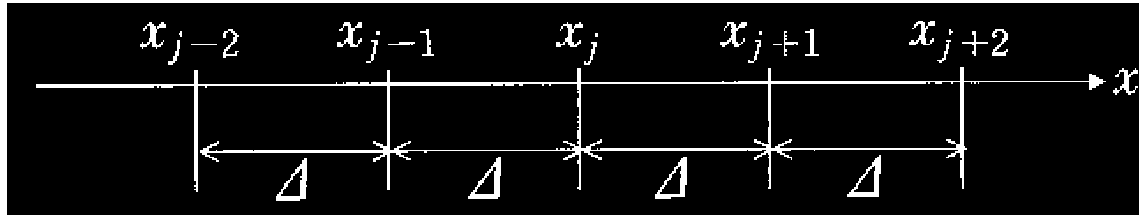
$$f_{j+k} = f_j + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(k\Delta)^m}{m!} f_j^{(m)}$$

であるから、f_{j-1} 、f_{j+1} はそれぞれ、

$$f_{j-1} = f_j - \Delta f_j' + \frac{\Delta^2}{2} f_j'' - \frac{\Delta^3}{6} f_j^{(3)} + \frac{\Delta^4}{24} f_j^{(4)} \cdots$$

$$f_{j+1} = f_j + \Delta f_j' + \frac{\Delta^2}{2} f_j'' + \frac{\Delta^3}{6} f_j^{(3)} + \frac{\Delta^4}{24} f_j^{(4)} \cdots$$

中心差分



- f_{j-1}、f_{j+1} 両式の差、和をとり整理すると

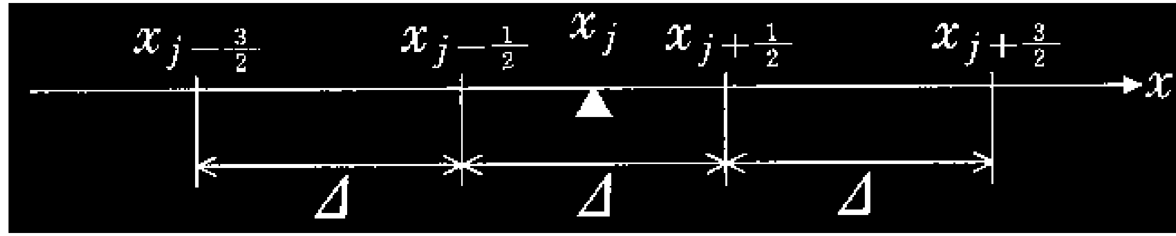
$$f_{j+1} - f_{j-1} = 2\Delta f_j' + \frac{\Delta^3}{3} f_j^{(3)} \cdots$$

$$f_{j+1} + f_{j-1} = 2 f_j + \Delta^2 f_j'' + \frac{\Delta^4}{12} f_j^{(4)} \cdots$$

$$f_j' = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta} - \frac{\Delta^2}{6} f_j^{(3)} \cdots$$

$$f_j'' = \frac{f_{j-1} - 2 f_j + f_{j+1}}{\Delta^2} - \frac{\Delta^2}{12} f_j^{(4)} \cdots$$

中間点での中心差分



- 基点 x_j が格子の中間点となるようにすると

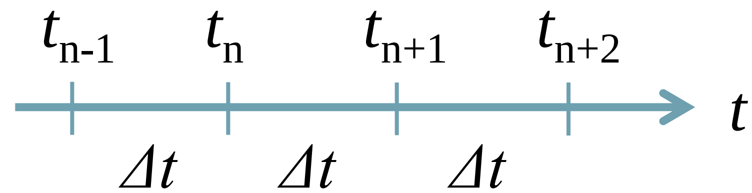
$$f_{j\pm\frac{1}{2}} = f_j \pm \frac{\Delta}{2} f_j' + \frac{\Delta^2}{8} f_j'' \pm \frac{\Delta^3}{48} f_j^{(3)} \cdots$$

より、基点 x_j における補間式と1階差分式が2次精度で以下のように求められる

$$f_j = \frac{f_{j-\frac{1}{2}} + f_{j+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\Delta^2}{8} f_j'' \cdots$$

$$f_j' = \frac{-f_{j-\frac{1}{2}} + f_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta} - \frac{\Delta^2}{24} f_j^{(3)} \cdots$$

時間発展



- 時間微分を含む次の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = g(f)$$

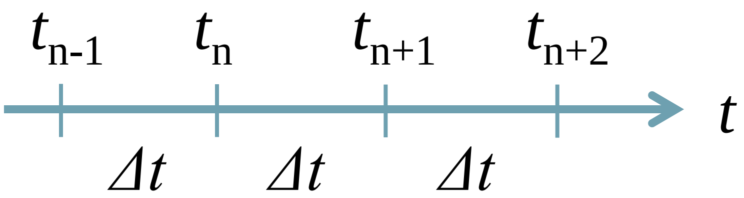
について差分化する。時間間隔を Δt とし、n ステップ目の値を f^{n} と書き表すと、以下のような差分式で表せる

$$(f^{n+1} - f^{n}) / \Delta t = g(f^{n}) \ldots (1)$$

$$(f^{n+1} - f^{n}) / \Delta t = g(f^{n+1}) \ldots (2)$$

$$(f^{n+1} - f^{n-1}) / (2\Delta t) = g(f^{n}) \ldots (3)$$

時間発展



$$(f^{n+1} - f^{n}) / \Delta t = g(f^{n}) \ldots (1)$$

$$(f^{n+1} - f^{n}) / \Delta t = g(f^{n+1}) \ldots (2)$$

$$(f^{n+1} - f^{n-1}) / (2\Delta t) = g(f^{n}) \ldots (3)$$

(1) 陽解法（explicit scheme）

nステップの値からn+1ステップの値が直ちに求まる。
解は必ずしも安定ではない

(2) 陰解法（implicit scheme）

n+1ステップの計算は複雑。解は安定

(3) リープ・フロッグ法（leap-frog scheme）

n-1、nステップの値が必要。解は中立

まとめ

- コンピューターは連続的な情報を扱うことが出来ず、大気を有限な格子点に分割して扱われることが一般的である。それにあわせ、微分方程式で表される大気の物理法則は、とびとびの格子点上での値を求めるように離散化される
- 離散化手法として、差分法がよく用いられる。もともと微分が有している関係は、差分化されても満たしていなければならない

移流方程式

- 運動方程式の東西成分

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} + fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x$$

右辺のうち、東西風による移流項のみ残し、他の項は無視できるとする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

このような型の微分方程式は移流方程式と呼ばれる

線形移流方程式

- f についての移流方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

移流項 $u(\partial f/\partial x)$ は非線形のため複雑なので、ここでは簡単のため、移流速度は $c\ (\geq 0)$ で一定であるとする。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

移流項は線形化され、解析解が求まる。

線形移流方程式の解

$$\frac{\partial f}{\partial t}+c\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

において変数 X, T を

$$\begin{cases} X=x-ct \\ T=t \end{cases}$$

のように置くと、

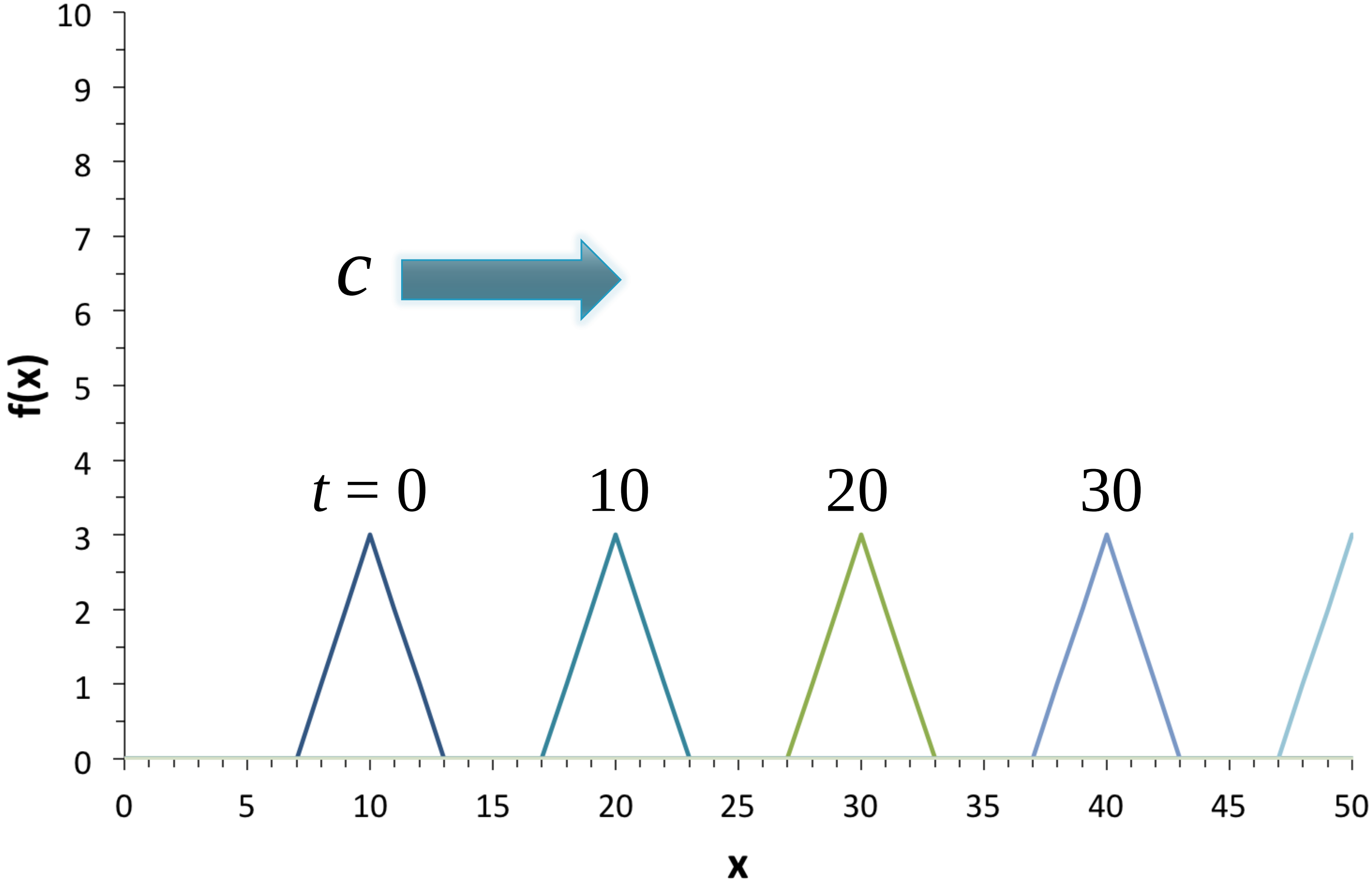
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}=\dfrac{\partial T}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial T}+\dfrac{\partial X}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial X}=\dfrac{\partial}{\partial T}-c\dfrac{\partial}{\partial X} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial T}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial T}+\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial X}=\dfrac{\partial}{\partial X} \end{cases}$$

- これを利用して**線形移流方程式**を書き直すと、

$$\frac{\partial f}{\partial T}=0$$

$\rightarrow$ $t=0$ における f の分布を維持したまま速さ c で移動

線形移流方程式の解



線形移流方程式の差分近似

- 時間微分については、陽解法を採用

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}$$

- 空間微分に中心差分を用いると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{j-\frac{1}{2}}^n + f_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}$$

- $f_{\mathrm{j}\pm 1/2}$ の補間を $f_{j\pm\frac{1}{2}}^n = \dfrac{f_j^n + f_{j\pm 1}^n}{2}$ とすると、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{j-1}^n + f_{j+1}^n}{2\Delta x}$$

線形移流方程式の差分近似

- 線形移流方程式

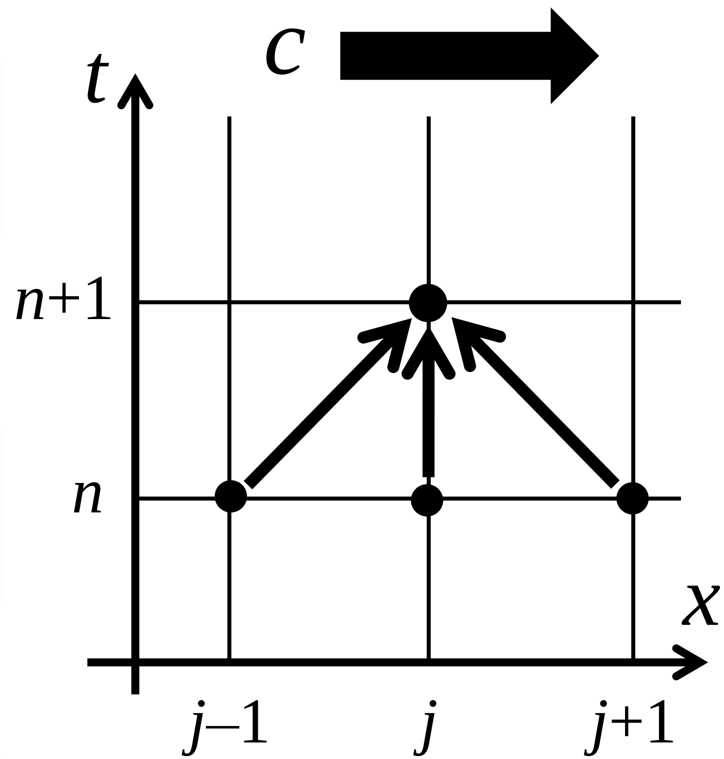
$$\frac{\partial f}{\partial t}+c\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

を中心差分で差分近似すると、

$$\frac{f_j^{n+1}-f_j^n}{\Delta t}+c\frac{-f_{j-1}^n+f_{j+1}^n}{2\Delta x}=0$$

整理すると、

$$f_j^{n+1}=\frac{c\Delta t}{2\Delta x}f_{j-1}^n+f_j^n-\frac{c\Delta t}{2\Delta x}f_{j+1}^n$$

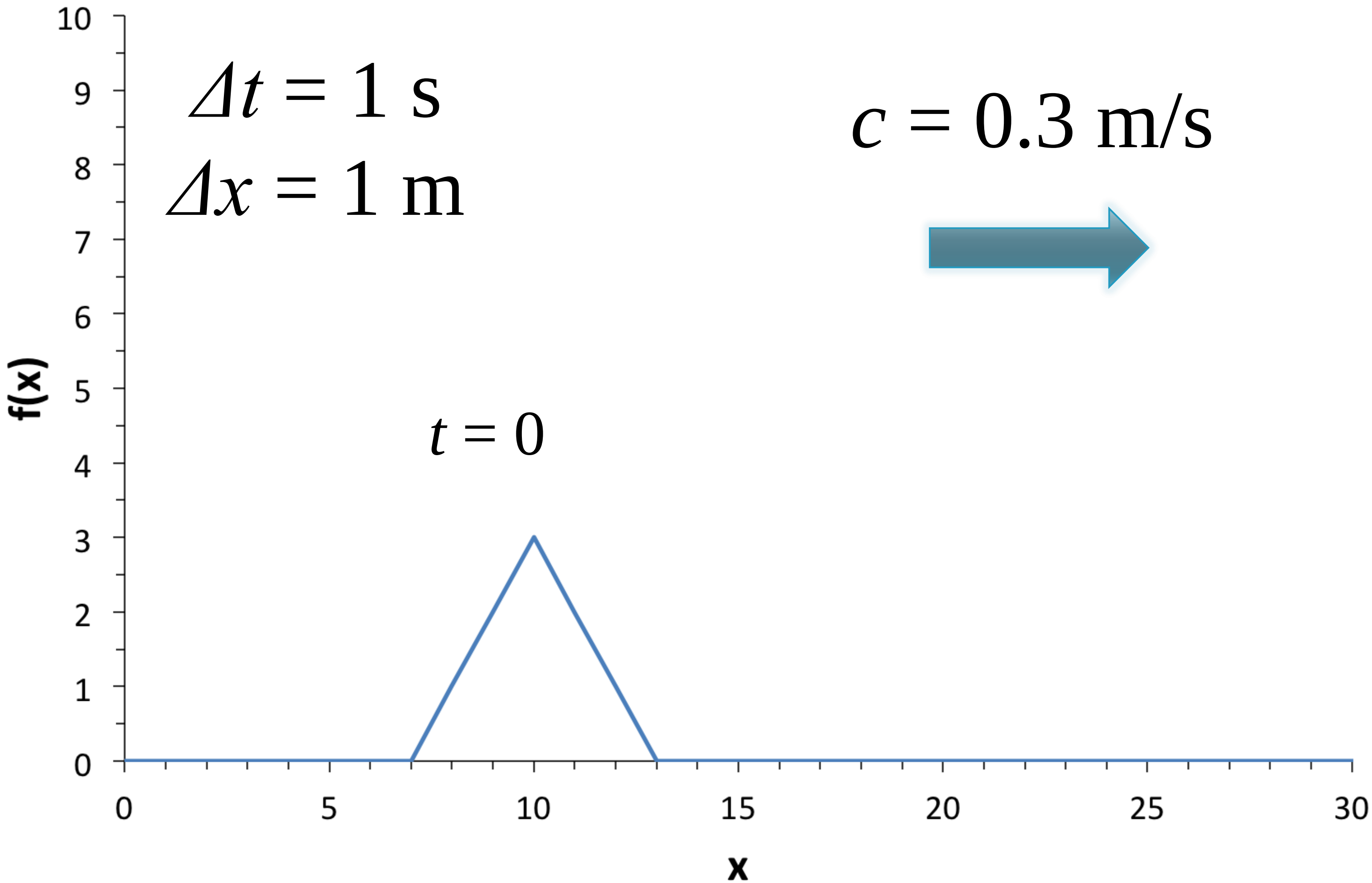


差分解の例（中心差分）

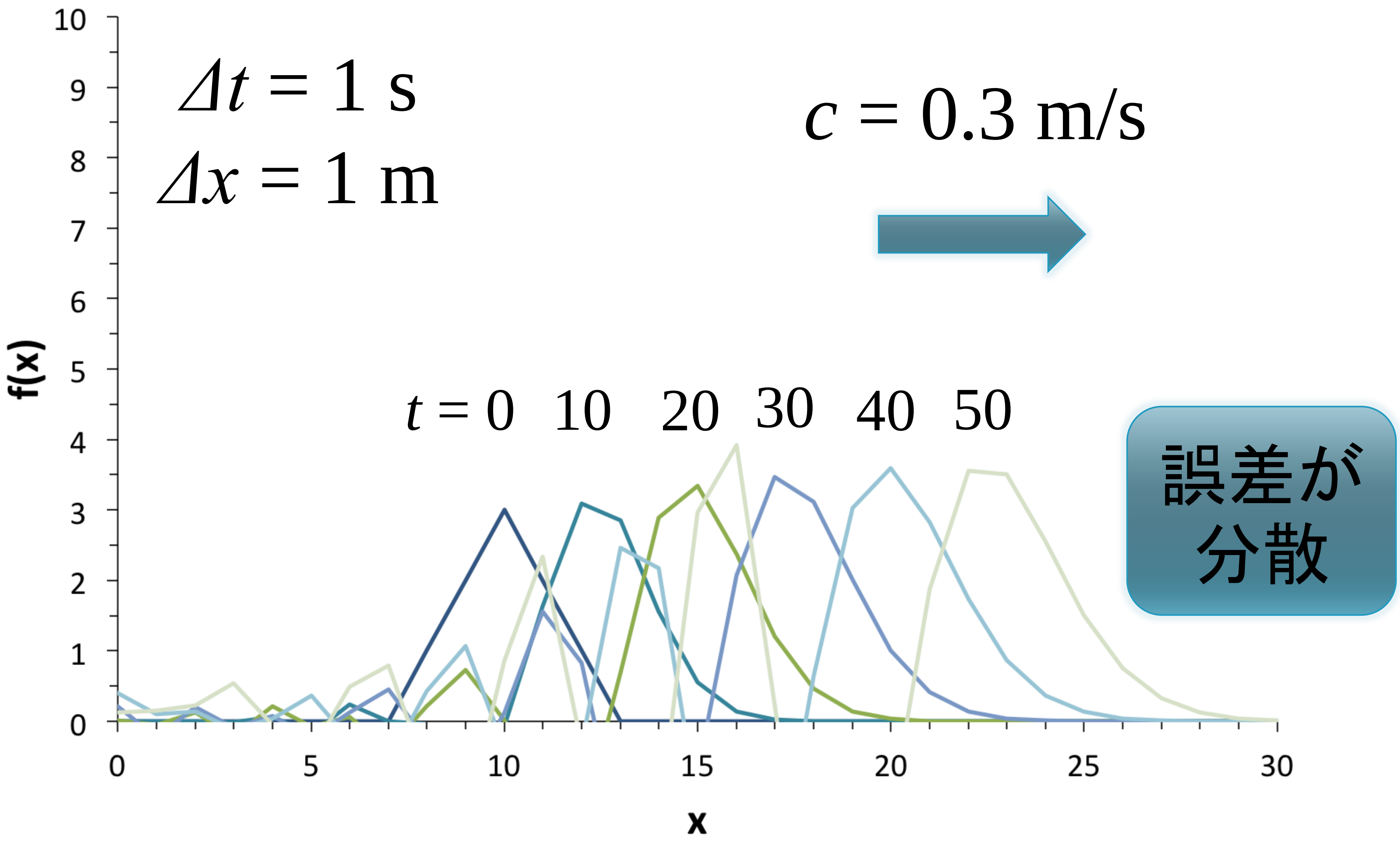
$\Delta t = 1\ \mathrm{s}$

$\Delta x = 1\ \mathrm{m}$

$c = 0.3\ \mathrm{m/s}$



差分解の例（中心差分）


$\Delta t = 1$ s
$\Delta x = 1$ m
$c = 0.3$ m/s
$t = 0$ 10 20 30 40 50
誤差が分散
f(x)
x
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 5 10 15 20 25 30

別の差分近似

- 時間微分は同様に、陽解法を採用

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}$$

- 空間微分は風上側の格子点を採用した片側差分を用いると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{j-1}^n + f_j^n}{\Delta x}$$

- 上記のような風上（上流）側の点のみ使う差分形式を風上（上流）差分という

別の差分近似

- 線形移流方程式

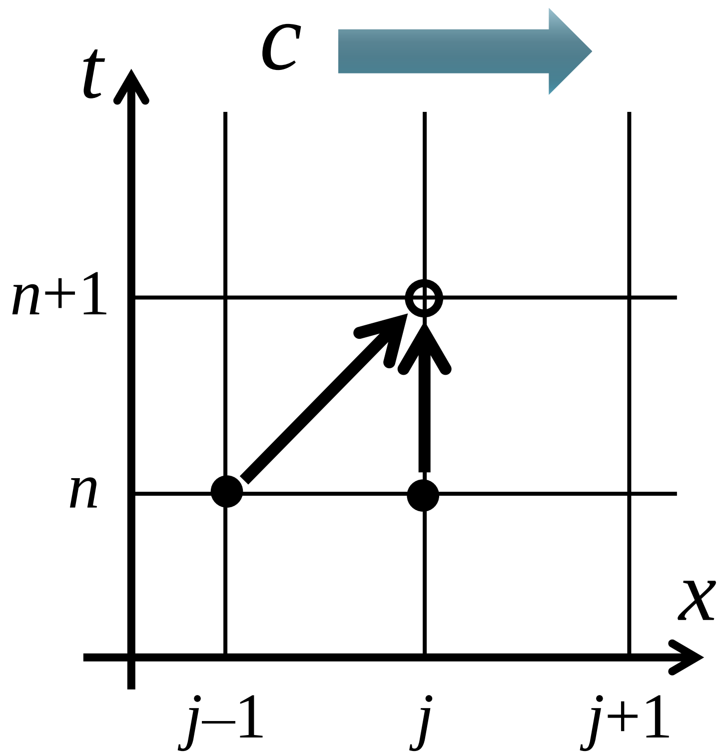
$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

を風上差分で差分近似すると、

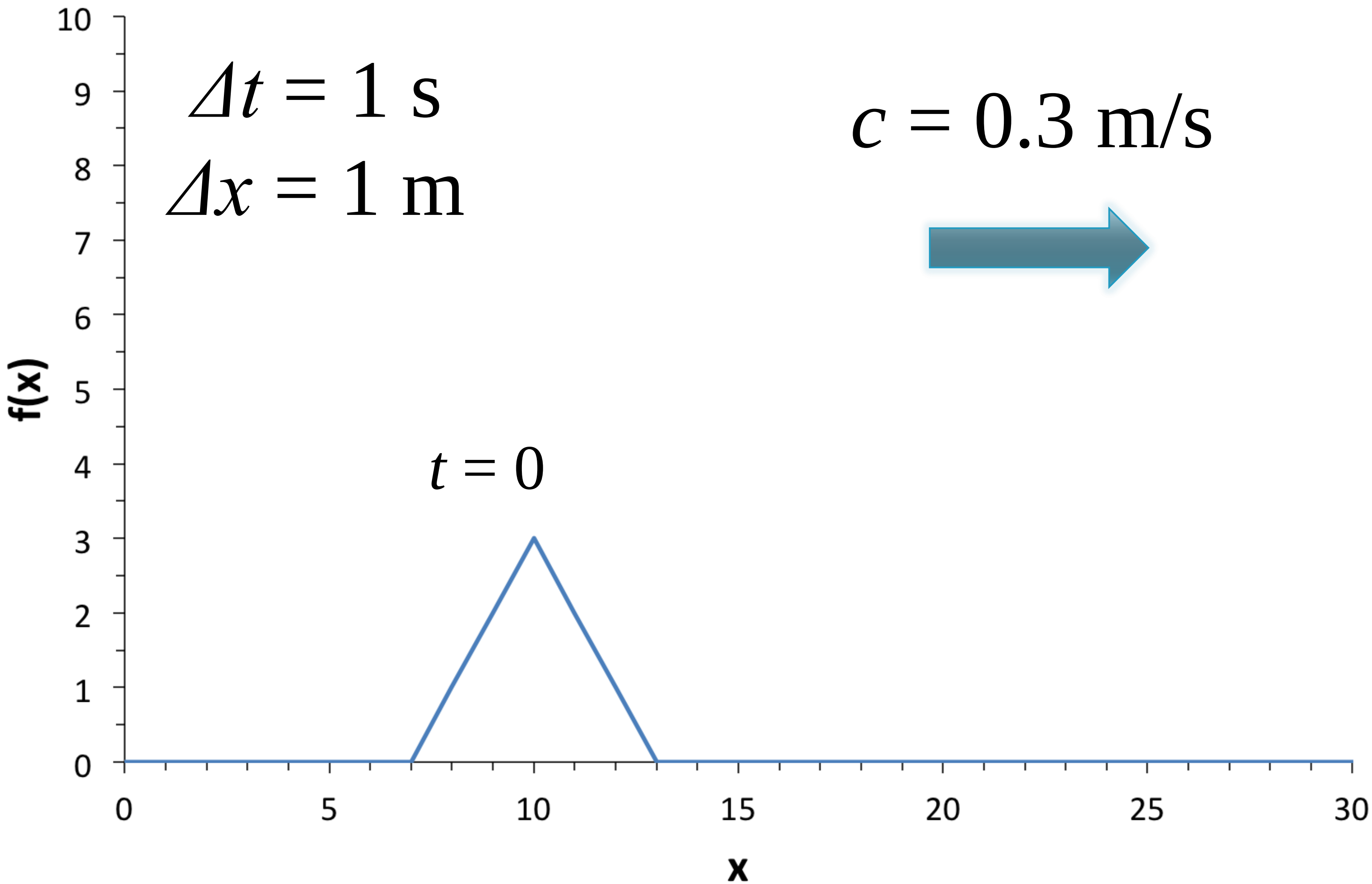
$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} + c\frac{-f_{j-1}^n + f_j^n}{\Delta x} = 0$$

整理すると、

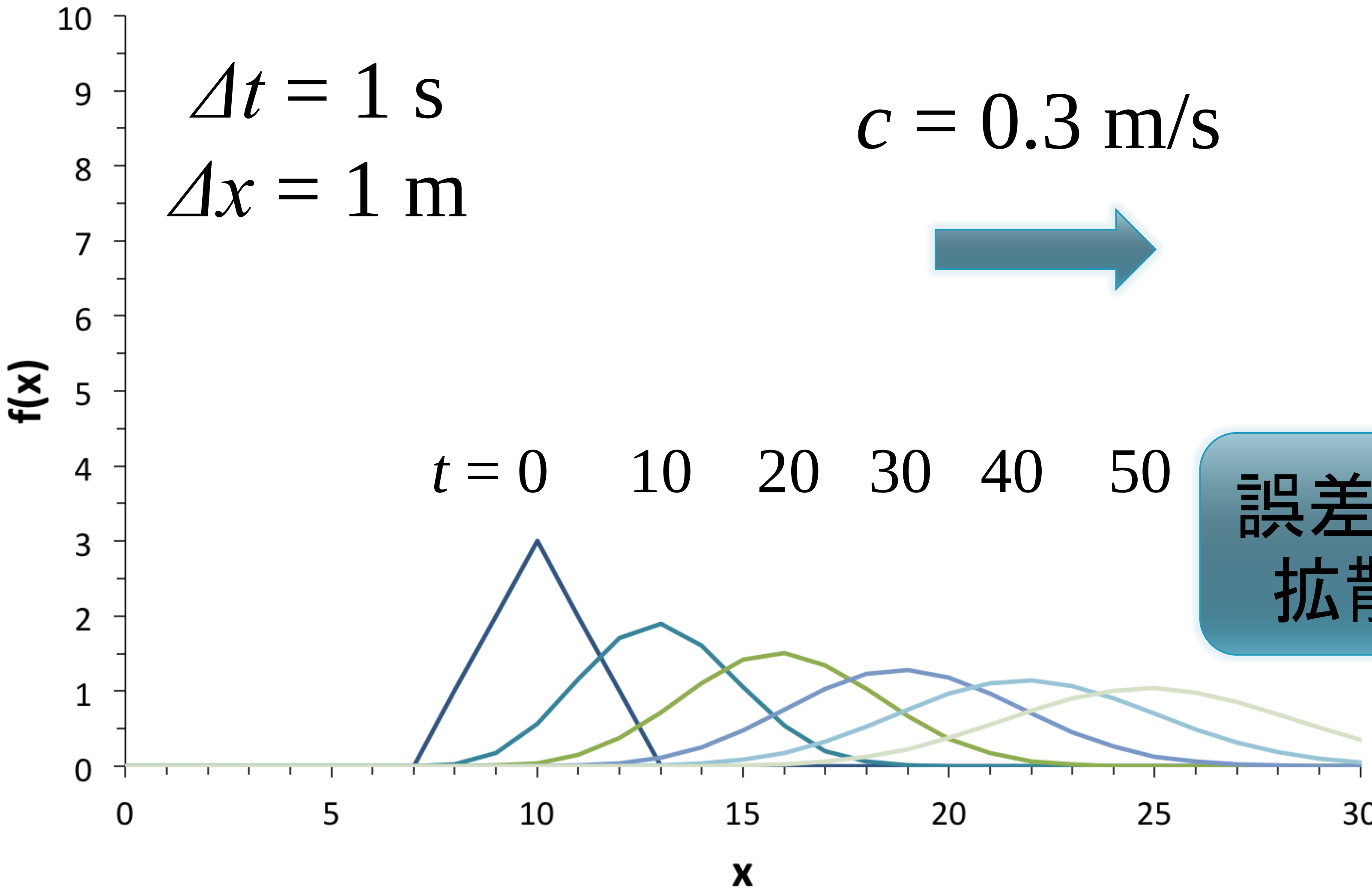
$$f_j^{n+1} = \frac{c\Delta t}{\Delta x} f_{j-1}^n + \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) f_j^n$$



差分解の例（風上差分）


$\Delta t = 1$ s
$\Delta x = 1$ m
$c = 0.3$ m/s
$t = 0$
f(x)
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
5
10
15
20
25
30

差分解の例（風上差分）



誤差が拡散

離散化誤差の振る舞い

- 中心差分近似

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{j-1}^{n} + f_{j+1}^{n}}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{6} f_j'''^{n} + \cdots$$

→ 分散的

打ち切り誤差の主要項は奇数次の微分係数

- 風上差分近似

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{j-1}^{n} + f_{j}^{n}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} f_j''^{n} + \cdots$$

→ 拡散的

打ち切り誤差の主要項は偶数次の微分係数