大気のモデル化
支配方程式

前回のおさらい

モデル

- 理論を説明したり、現象を再現するための具体的なもの
- 数値シミュレーションにおいては、現象・理論を表現するコンピュータプログラム（数値モデル）
- 扱う現象・理論によりさまざまなモデルが用いられる

大気現象のスケールとモデル

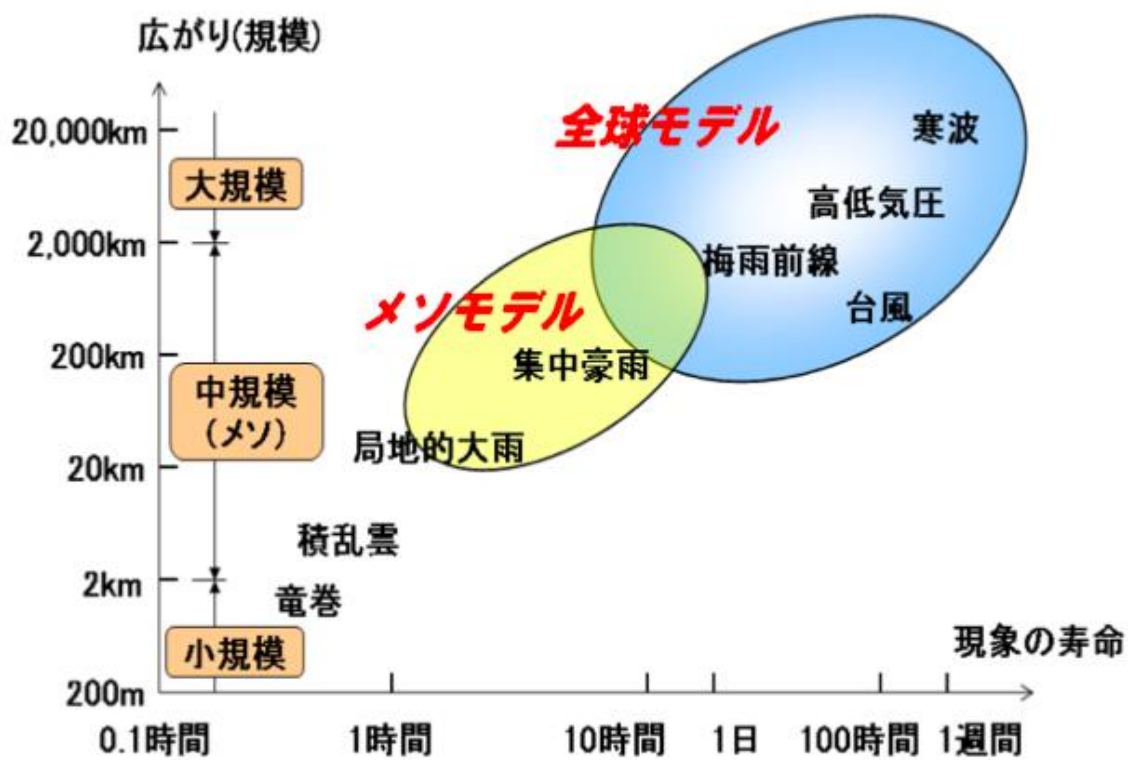
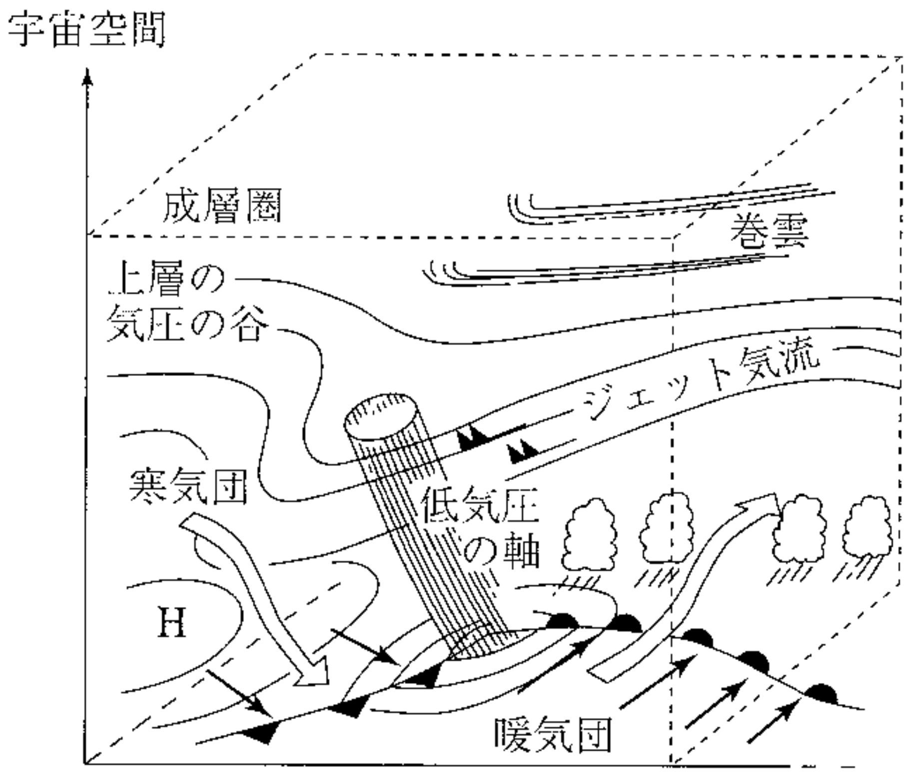


図 4-10　メソモデル・全球モデルが対象とする大気現象の水平及び時間スケール（気象庁，http://www.jma.go.jp/jma/kishou/know/whitep/1-3-4.html）

支配方程式系

- 大気の現象は基本的には物理法則に基づいている
- 大気を特徴づける風、気温などの要素の時間・空間変化は、微分方程式の形で記述される
- それらの方程式を解くことで、大気の変化を予想することが出来る

支配方程式系



- 地球大気の数値シミュレーションに用いられる支配方程式系は、地球表面に固定された座標（局所直交座標）で記述されることが一般的

支配方程式系

- **水平方向の運動方程式**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} + fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} - fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_y$$

水平風の時間変化（局所変化）

移流効果

コリオリ力

気圧傾度力

その他外力

支配方程式系

- 鉛直方向の運動方程式

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z$$

鉛直風の時間変化　移流効果　気圧傾度力　重力　その他外力

- 質量保存則（連続の式）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -u\frac{\partial \rho}{\partial x} - v\frac{\partial \rho}{\partial y} - w\frac{\partial \rho}{\partial z} - \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

空気密度の時間変化　密度移流　収束・発散による変化

支配方程式系

熱力学第1法則（熱エネルギーの保存則）

$$\underbrace{\frac{\partial\theta}{\partial t}}_{\text{温位の時間変化}} = \underbrace{-u\frac{\partial\theta}{\partial x} - v\frac{\partial\theta}{\partial y} - w\frac{\partial\theta}{\partial z}}_{\text{移流効果}} \underbrace{+Q}_{\text{非断熱過程に伴う加熱・冷却}}$$

状態方程式

$$\underbrace{p}_{\text{気圧}} = \underbrace{\rho}_{\text{密度}}\underbrace{R}_{\text{気体定数}}\underbrace{T}_{\text{気温}}$$

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_P}$$

支配方程式系

- 水蒸気の保存則

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -u\frac{\partial q}{\partial x} - v\frac{\partial q}{\partial y} - w\frac{\partial q}{\partial z} + M$$

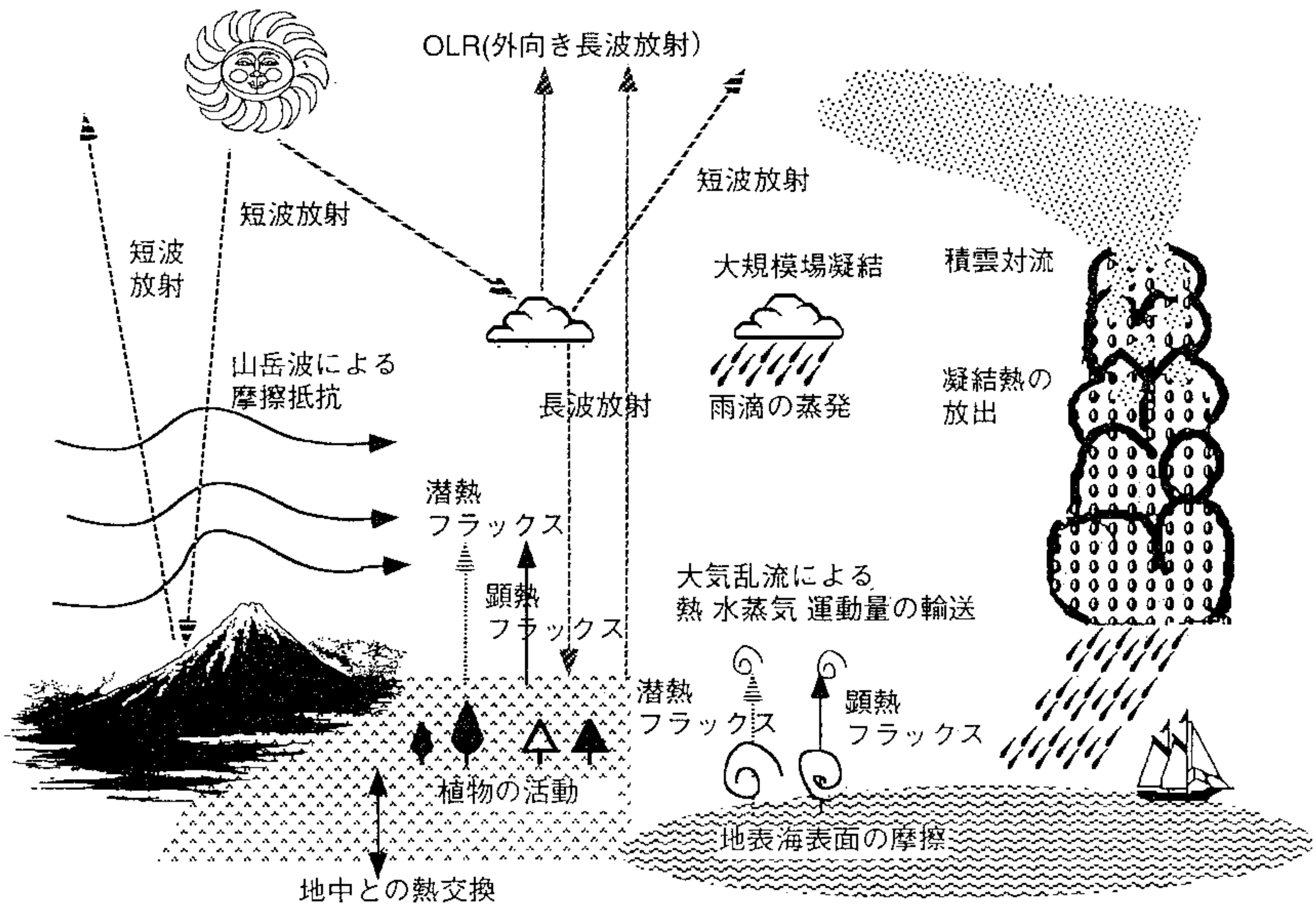
比湿の時間変化

移流効果

非断熱過程に伴う加湿・減湿

- 水蒸気のほかに、雲水、雲氷、降水、雪、あられの変化が変数として扱われることもある

様々な外力・非断熱過程


OLR(外向き長波放射)
短波放射
短波放射
短波
放射
大規模場凝結
積雲対流
山岳波による
摩擦抵抗
長波放射
雨滴の蒸発
凝結熱の
放出
潜熱
フラックス
顕熱
フラックス
大気乱流による
熱 水蒸気 運動量の輸送
潜熱
フラックス
顕熱
フラックス
植物の活動
地表海表面の摩擦
地中との熱交換

その他の外力や非断熱過程

- 数値シミュレーションで扱う現象の規模や期間などにより、考慮すべき外力や非断熱過程も変わってくる
  - **地表面付近では、摩擦力が重要**
  - **規模の小さい積雲群が大規模現象に与える影響（→積雲対流パラメタリゼーション）**
  - **海洋、陸面、植生などとの相互作用が気候モデルには重要**
- それらの外力・非断熱過程の与え方は、モデルによりさまざま

微分

- 関数 $y = f(x)$ について

$$\boxed{\frac{df(a)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}}$$

が存在すれば、$f(x)$ は $x = a$ において微分可能といい、$df(a)/dx$ を $x = a$ における $f(x)$ の微分係数という

- 関数 $y = f(x)$ がある区間について微分可能ならば

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

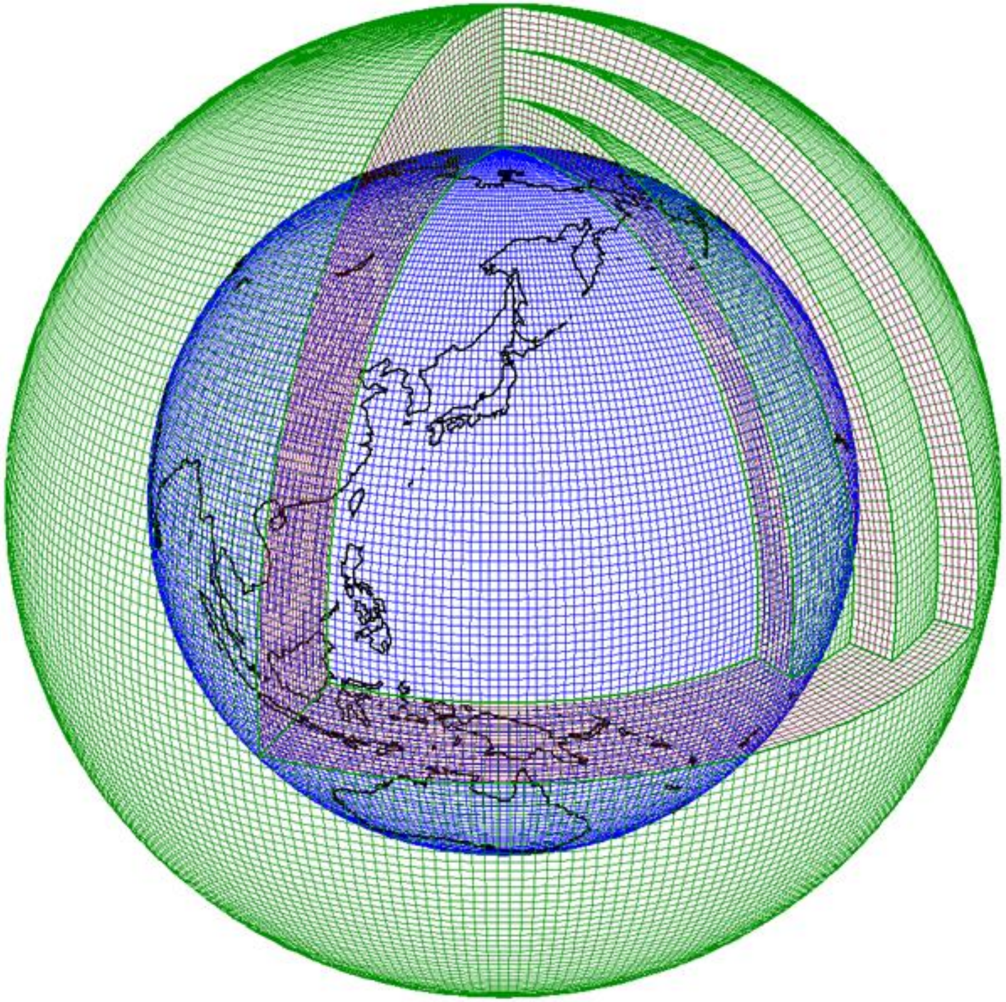
が定義できる。これを $f(x)$ の導関数という

離散化

- 現実の大気の状態は、微分方程式によって表現される　→連続的
- コンピューターでは、連続的な情報を扱うことが非常に困難である
- 連続した値をとびとびの値に置き換えて、コンピューターで扱えるようにする　→離散化

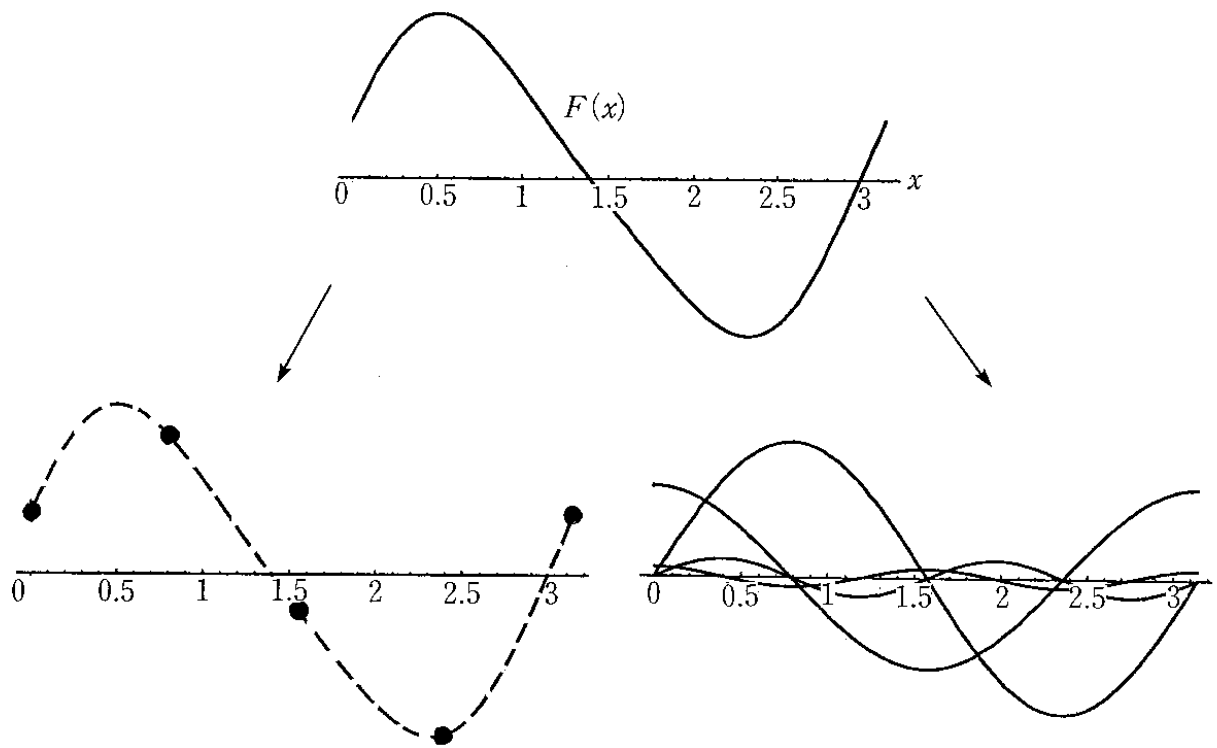
格子点

- コンピューターによる大気シミュレーションでは、大気を有限個の格子に分け、格子点上の気象要素を計算する



（有限）差分法

- 微分方程式を解く際、関数の2つの変数値に対してとる値を変数値の差で割った値（差分商）で微分を近似する方法



(a) 1次元の場合の格子点法
実線のような分布をする変数 $F(x)$ を黒丸の値で近似する.

(b) スペクトル法の場合
図のように $F(x)$ を基底関数に分解し, 各々の振幅のセットで $F(x)$ を近似する.

図 1-1　格子点法とスペクトル法

テイラー展開

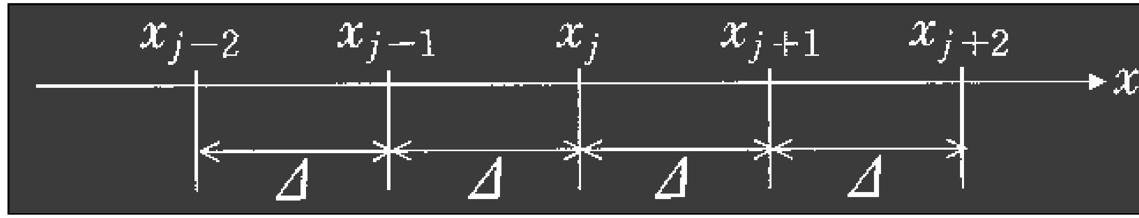
- 点 x 近傍でのテイラー展開は

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta x^m}{m!} f^{(m)}(x)$$

- 例えば、k 番目の点 x_k での値 $f_\mathrm{k} = f(x_\mathrm{k})$ を j 番目の点 x_j を基点として展開すると

$$f_k = f_j + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_k - x_j)^m}{m!} f_j^{(m)}$$

中心差分



- 等間隔 $\varDelta$ の格子において、$x_{\mathrm{j}} = j\varDelta$ 近傍でのテイラー展開は

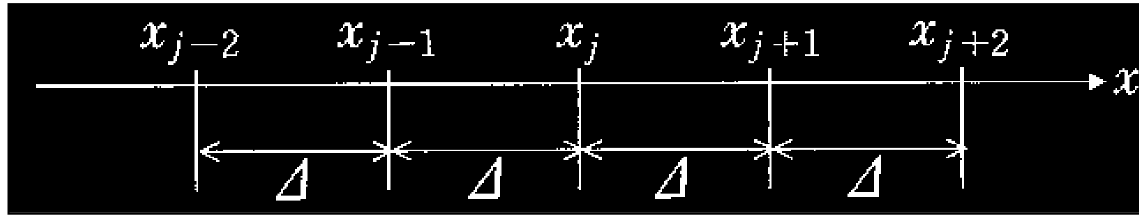
$$f_{j+k} = f_j + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(k\Delta)^m}{m!} f_j^{(m)}$$

であるから、$f_{\mathrm{j-1}}$ 、$f_{\mathrm{j+1}}$ はそれぞれ、

$$f_{j-1} = f_j - \Delta f_j' + \frac{\Delta^2}{2} f_j'' - \frac{\Delta^3}{6} f_j^{(3)} + \frac{\Delta^4}{24} f_j^{(4)} \cdots$$

$$f_{j+1} = f_j + \Delta f_j' + \frac{\Delta^2}{2} f_j'' + \frac{\Delta^3}{6} f_j^{(3)} + \frac{\Delta^4}{24} f_j^{(4)} \cdots$$

中心差分



- f_{j-1} 、f_{j+1} 両式の差、和をとり整理すると

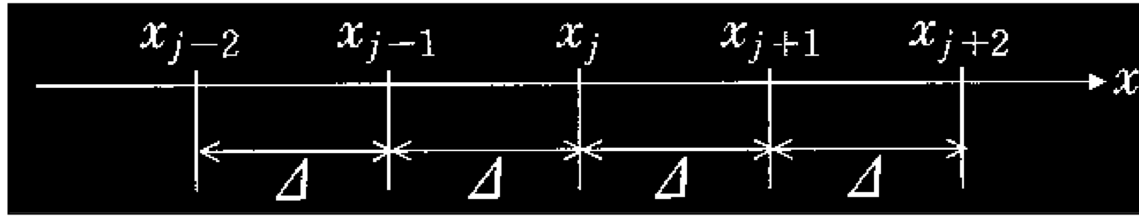
$$f_{j+1} - f_{j-1} = 2\Delta f_j' + \frac{\Delta^3}{3} f_j^{(3)} \cdots$$

$$f_{j+1} + f_{j-1} = 2 f_j + \Delta^2 f_j'' + \frac{\Delta^4}{12} f_j^{(4)} \cdots$$

$$f_j' = \frac{-f_{j-1} + f_{j+1}}{2\Delta} - \frac{\Delta^2}{6} f_j^{(3)} \cdots$$

$$f_j'' = \frac{f_{j-1} - 2 f_j + f_{j+1}}{\Delta^2} - \frac{\Delta^2}{12} f_j^{(4)} \cdots$$

中心差分



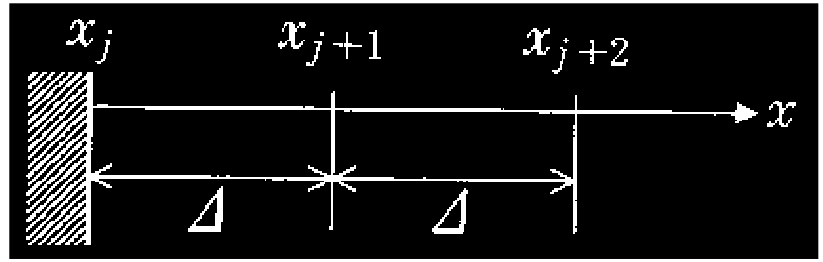
- Δ について2次以上の項を無視すると

$$f'_j = \frac{-f_{j-1} + f_{j+1}}{2\Delta} \qquad f''_j = \frac{f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}}{\Delta^2}$$

となり、2次精度（誤差の主要項がΔの2乗に比例）の差分近似式が求まる

- 上記の例は基点 x_j に対して使用する格子が両側に対称である。このような差分を中心差分（中央差分）という

片側差分



- 基点 x_j に対して片側の点だけ用いて差分式を構成することも出来る

$$f_{j+1} = f_j + \Delta f_j' + \frac{\Delta^2}{2} f_j'' + \frac{\Delta^3}{6} f_j^{(3)} + \frac{\Delta^4}{24} f_j^{(4)} \cdots$$

より、

$$f_j' = \frac{-f_j + f_{j+1}}{\Delta} - \frac{\Delta}{2} f_j'' \cdots$$

上記のような差分を片側差分という。片側差分は1次精度を持ち、一般に中心差分より精度が悪い

良い差分と悪い差分

- 微分は次の関係が成立する

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x} = f\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}g$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

- 上記の関係は差分化されても保持されねばならない

良い差分と悪い差分

- さきほどの中心差分について、

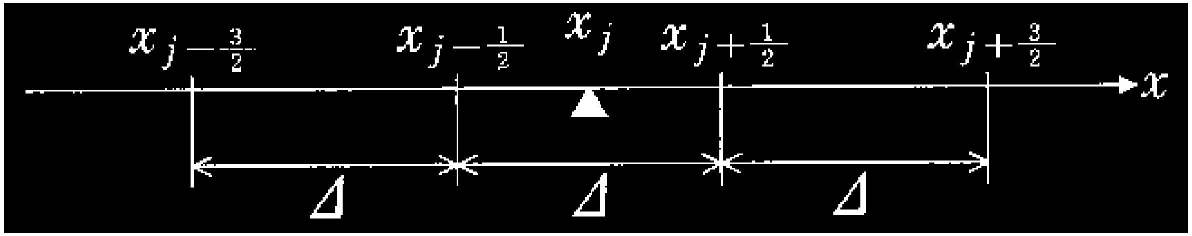
$$\frac{\partial (fg)}{\partial x} = f\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} g$$

が成り立っているか検証してみる。

$$\frac{-(fg)_{j-1} + (fg)_{j+1}}{2\Delta} \neq f_j \frac{-g_{j-1} + g_{j+1}}{2\Delta} + \frac{-f_{j-1} + f_{j+1}}{2\Delta} g_j$$

- 差分式では、微分で成り立つ関係が成り立っていない　→「悪い差分」

中間点での中心差分



- 基点 x_j が格子の中間点となるようにすると

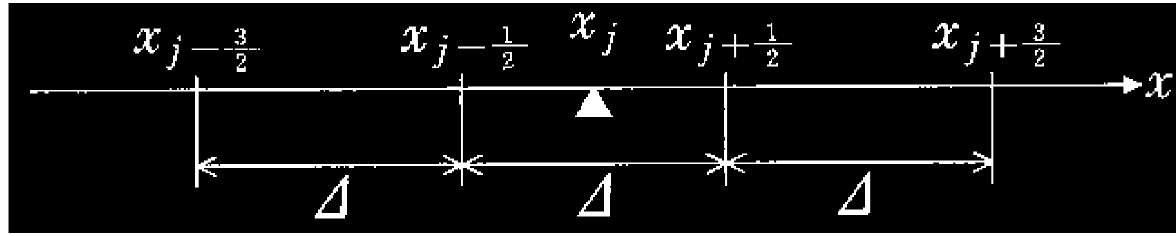
$$f_{j\pm\frac{1}{2}} = f_j \pm \frac{\Delta}{2} f_j' + \frac{\Delta^2}{8} f_j'' \pm \frac{\Delta^3}{48} f_j^{(3)} \cdots$$

より、基点 x_j における補間式と1階差分式が2次精度で以下のように求められる

$$f_j = \frac{f_{j-\frac{1}{2}} + f_{j+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\Delta^2}{8} f_j'' \cdots$$

$$f_j' = \frac{-f_{j-\frac{1}{2}} + f_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta} - \frac{\Delta^2}{24} f_j^{(3)} \cdots$$

中間点での中心差分



- $\partial(fg)/\partial x = f\,(\partial g/\partial x) + (\partial f/\partial x)g$ を検証

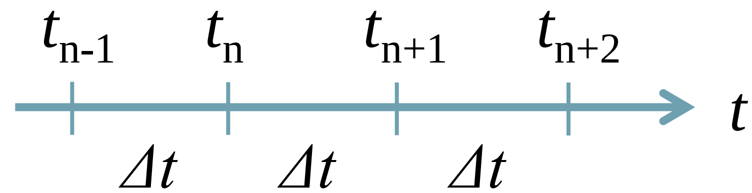
$$\left[\frac{\partial(fg)}{\partial x}\right]_j = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial(fg)}{\partial x}\right]_{j-\frac{1}{2}} + \left[\frac{\partial(fg)}{\partial x}\right]_{j+\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-f_{j-1}g_{j-1} + f_j g_j}{\Delta} + \frac{-f_j g_j + f_{j+1}g_{j+1}}{\Delta}\right)$$

$$\left[f\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}g\right]_j = \frac{1}{2}\left\{\left[f\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}g\right]_{j-\frac{1}{2}} + \left[f\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}g\right]_{j+\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \cdots$$

時間発展



- 時間微分を含む次の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = g(f)$$

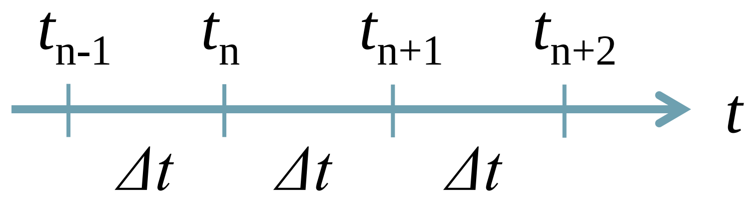
について差分化する。時間間隔を Δt とし、n ステップ目の値を f^{n} と書き表すと、以下のような差分式で表せる

$$(f^{n+1} - f^{n}) / \Delta t = g(f^{n}) \ldots (1)$$

$$(f^{n+1} - f^{n}) / \Delta t = g(f^{n+1}) \ldots (2)$$

$$(f^{n+1} - f^{n-1}) / (2\Delta t) = g(f^{n}) \ldots (3)$$

時間発展



$$(f^{n+1} - f^{n}) / \Delta t = g(f^{n}) \ldots (1)$$

$$(f^{n+1} - f^{n}) / \Delta t = g(f^{n+1}) \ldots (2)$$

$$(f^{n+1} - f^{n-1}) / (2\Delta t) = g(f^{n}) \ldots (3)$$

(1) 陽解法（explicit scheme）

nステップの値からn+1ステップの値が直ちに求まる。解は必ずしも安定ではない

(2) 陰解法（implicit scheme）

n+1ステップの計算は複雑。解は安定

(3) リープ・フロッグ法（leap-frog scheme）

n-1、nステップの値が必要。解は中立

まとめ

- コンピューターは連続的な情報を扱うことが出来ず、大気を有限な格子点に分割して扱われることが一般的である。それにあわせ、微分方程式で表される大気の物理法則は、とびとびの格子点上での値を求めるように離散化される
- 離散化手法として、差分法がよく用いられる。もともと微分が有している関係は、差分化されても満たしていなければならない