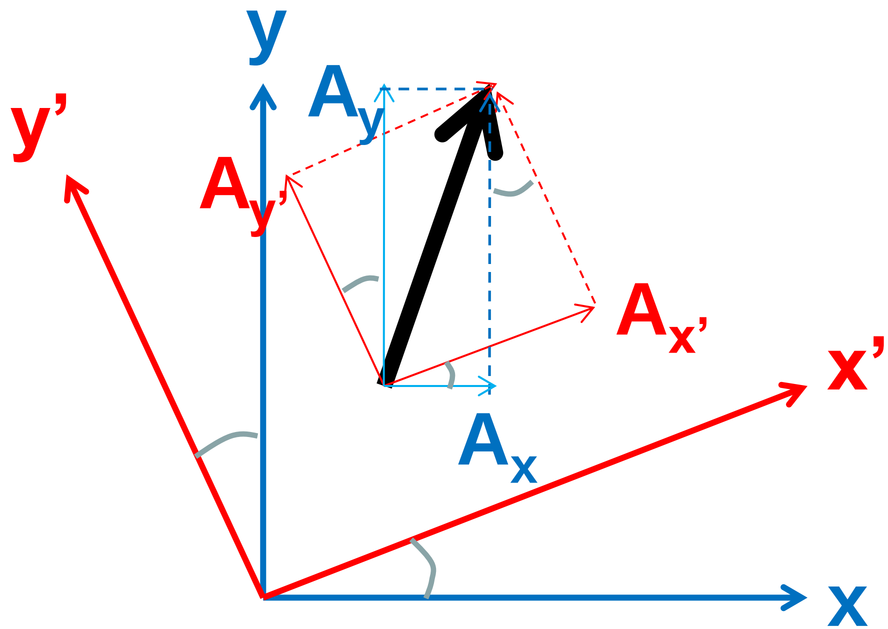
1.13　平面運動の極座標表示



二次元ベクトルの分解

$$A_{x'} = A_x \cos\theta + A_y \sin\theta$$

$$A_{y'} = -A_x \sin\theta + A_y \cos\theta$$

$$A_x = A_{x'} \cos\theta - A_{y'} \sin\theta$$

$$A_y = A_{x'} \sin\theta + A_{y'} \cos\theta$$

検算
θ=0
θ=90度

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix}$$

・速度を極座標で表す

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$v_x = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$v_y = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$\dot{\theta}$

角速度

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta$$

$$v_\theta = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta$$

・加速度を極座標で表す

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$ とも書くことができる

・ a_t=0 → 面積速度 $\frac{1}{2}r^2 d\theta$

速さに比例する抵抗を受けながら落下する物体の運動を考える。鉛直下向きにx軸をとる。

$$m\ddot{x} = -C\dot{x} + mg \Rightarrow m\dot{v} = -Cv + mg$$

$$u(t) = v - \frac{mg}{C} \Rightarrow m\dot{u} = -Cu$$

$$u = Ae^{-Ct/m} \Rightarrow v = \frac{mg}{C} + Ae^{-Ct/m}$$

$$v_0 = 0$$

$$\Rightarrow v = \frac{mg}{C}\left(1 - e^{-Ct/m}\right)$$

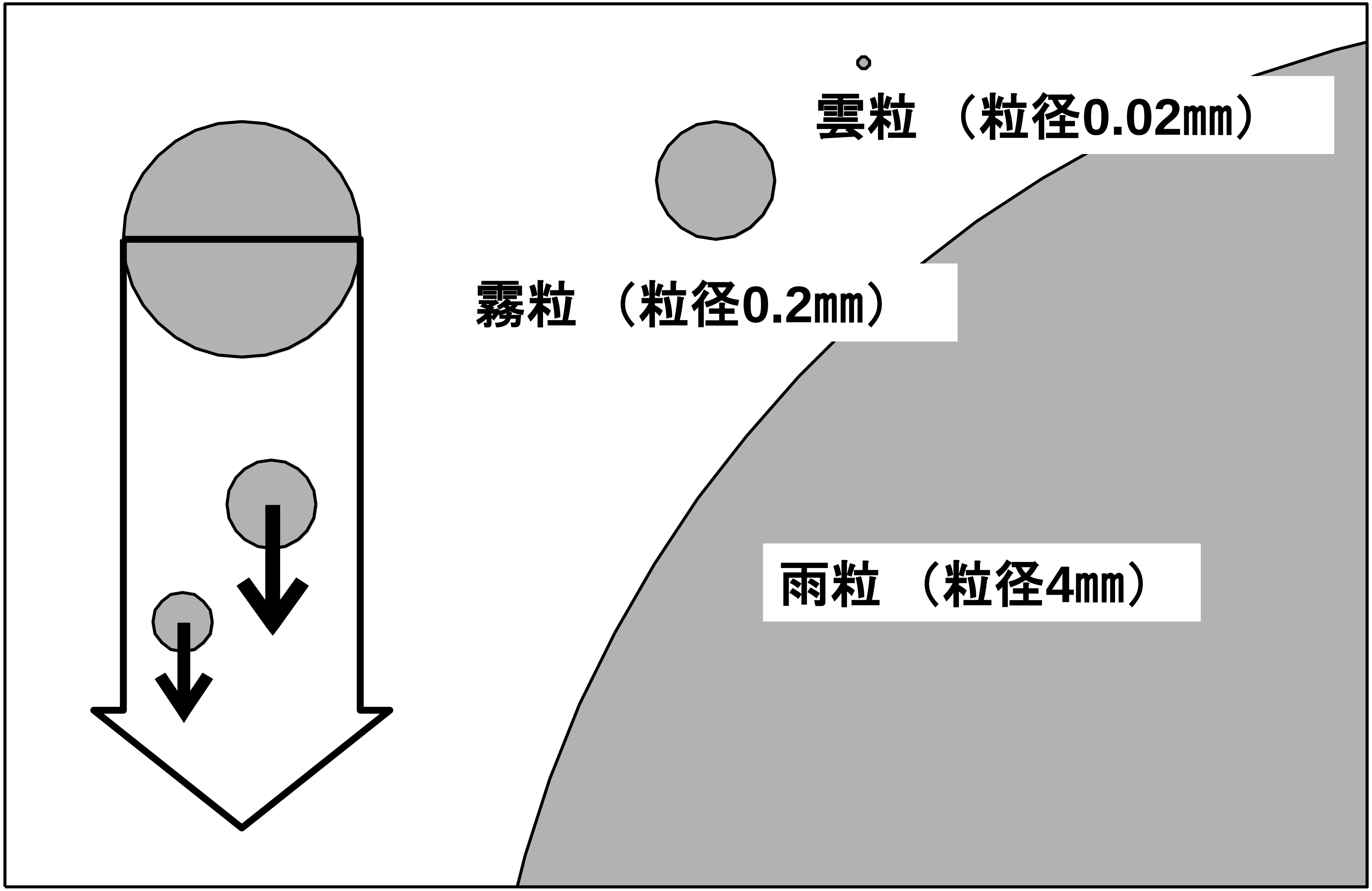
$$x = \frac{mg}{C}t - \frac{m^2 g}{C^2}\left(1 - e^{-Ct/m}\right)$$

時間tでは変位xと速度vは上記のように表せる

時間がたてば、落下する雨粒は摩擦をうけてある速度に落ち着くようになる。

$$v_{t=\infty} = \frac{mg}{C}$$

$$x = \frac{mg}{C} t + const$$



水滴の相対的な大きさと落下速度

水滴と氷粒子の落下速度

直径(μ m)	終末速度(m/s)
1	0.00003
10	0.003
100	0.30
1,000	4
5,000	10
1cm ひょう	9
2cm ひょう	16
5cmひょう	33
10cmひょう	59

1.14　万有引力と惑星の運動

・　重要なキーワード

＊　万有引力

＊　万有引力定数

＊　中心力

$$F_r = -G\frac{mm'}{r^2}$$

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} m^3/(kg \cdot s^2)$$

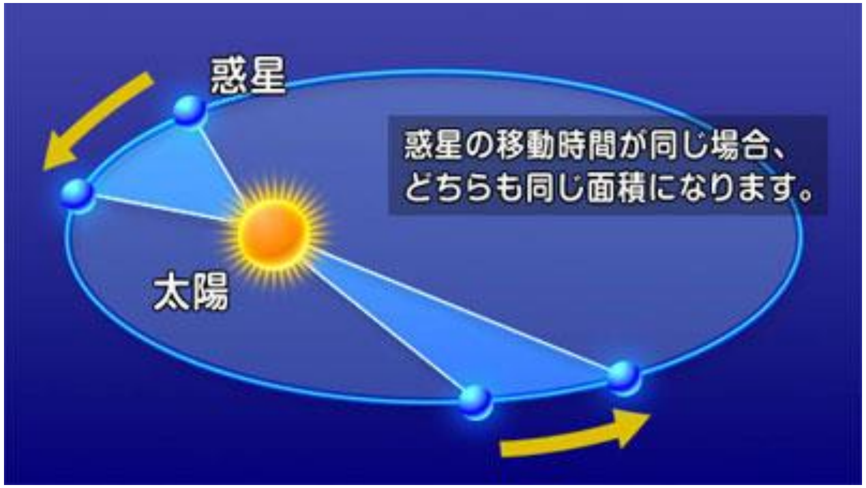
$$U = -G\frac{mm'}{r}$$

ケプラーの第1法則
惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く

ケプラーの第2法則
惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は一定である

ケプラーの第3法則
惑星の公転周期Tの２乗は軌道の長半径aの３乗に比例する

$$T^2 \propto a^3$$



ケプラーまでの歴史

・天動説 （プトレマイオス・アリストテレスなど）
ギリシャ時代から中世まで
サモスのアリスタルコス（B.C.300頃）に地動説を主張

・コペルニクス （～1543） 地動説、円軌道
・ガリレイ 運動の法則 地動説を支持
1616年にローマ教王庁から異端判決
・チコ・ブラーエ（1546-1601）の綿密な目視観測、
修正天動説、円軌道

・ヨハネス・ケプラー(1571-1630) ケプラーの法則

インターネットより

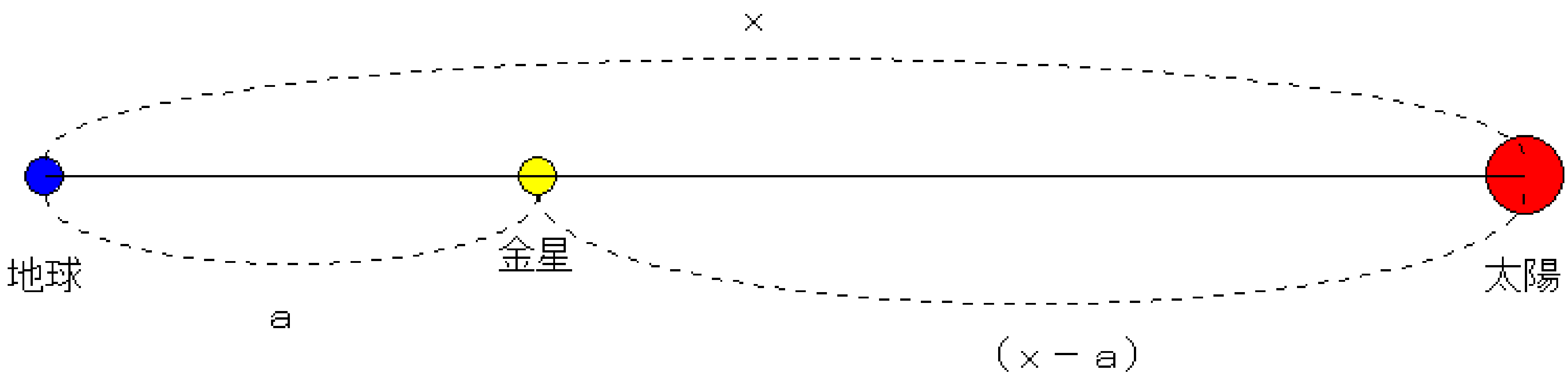
ガリレオははじめて望遠鏡による天体観測を行い、1610年、木星のまわりを動く4つの衛星を発見します。この発見を皮切りに、ガリレオは金星の満ち欠けと大きさが変化して見えることなど天動説では説明できない現象を次々と発見していきました。これにより、ガリレオは地動説を強く信じるようになるのです

インターネットより

・楕円運動の発見のエピソードとして、当時、惑星の運動は円であると信じられていたが、それに従わない火星のデータをティコ・ブラーエが困ってケプラーに担当させたため、との話がある。

・第3法則は江戸時代の日本の天文学者、麻田剛立（あさだごうりゅう：1734-1799）が独自に発見していた（出典 麻田剛立『五星距地之奇法』および、鹿毛敏夫文・関屋敏隆画・くもん出版・2008年『月のえくぼ（クレーター）を見た男 麻田剛立』194P）。しかし麻田は惑星の軌道を円と認識し、「惑星軌道の半径の3乗と公転周期の2乗が比例する」と言う趣旨の記述をしており、正確に同じ法則を発見していたとは言えない。また一部には麻田の法則性発見に疑問をもつ科学史家もいるが、麻田が惑星軌道を楕円と認識せず、円と考えたうえで上記の法則を記述していたという“事実誤認”は、逆に麻田剛立の発見が彼独自のものであった可能性を補強している。

インターネットより



$$\frac{x^3}{T_E^2} = \frac{(x-a)^3}{T_V^2}$$

T_E：地球の公転周期

T_V：金星の公転周期

地球と太陽の距離：現在では、地球と太陽の距離はケプラーの第3法則から求めている。まず地球と金星の距離（a）を、電波の跳ね返りに要する時間から正確に求める。そして下のように地球と太陽の距離（x）、地球の公転周期（T_E）、金星の公転周期（T_V）の間にケプラーの第3法則を適用する。

インターネットより

M: 太陽の質量, m：惑星の質量

$$-G\frac{Mm}{r^2}=m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)$$

$$0=\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$$

第2式より、面積速度が一定

（ケプラーの第2法則）

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad h = r^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} r - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}$$

$$\frac{h^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{r}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{GM}{h^2} \quad \Rightarrow \quad u - \frac{GM}{h^2} = w$$

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = 0 \Rightarrow w = C\cos(\theta + \alpha)$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{l}{1 + e\cos(\theta + \alpha)}, where \quad l = \frac{h^2}{GM}, \quad e = \frac{h^2 C}{GM}$$

原点を焦点とする離心率eの円錐運動を表す

惑星は太陽を焦点とする楕円軌道を描いて運動する
(ケプラーの第1法則)

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$:楕円

$$\frac{l}{1 - e^2}$$:長半径

$$\frac{l}{\sqrt{1 - e^2}}$$:短半径

$$\frac{\pi l^2}{\left(1 - e^2\right)^{3/2}}$$:楕円の面積

$$\frac{2\pi l^2}{h\left(1-e^2\right)^{3/2}}$$:周期 T

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \times$$ (長半径)^3

公転周期の2乗は軌道の長半径の3乗に比例する
(ケプラーの第3法則)

観測事実をニュートンの法則と運動方程式から
理論的に導出できた