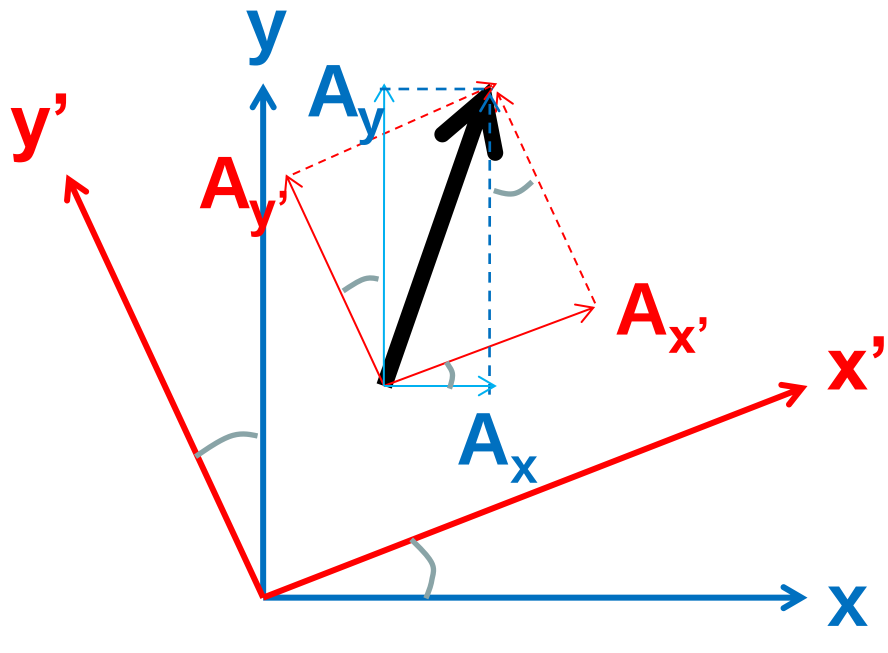
1.13 平面運動の極座標表示



二次元ベクトルの分解

$$A_{x'} = A_x \cos\theta + A_y \sin\theta$$

$$A_{y'} = -A_x \sin\theta + A_y \cos\theta$$

$$A_x = A_{x'} \cos\theta - A_{y'} \sin\theta$$

$$A_y = A_{x'} \sin\theta + A_{y'} \cos\theta$$

検算

θ=0

θ=90度

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \tilde{E} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix}$$

・速度を極座標で表す

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$v_x = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$v_y = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$\dot{\theta}$

角速度

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta$$

$$v_\theta = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta$$

・加速度を極座標で表す

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$ とも書くことができる

・ a_t=0 → 面積速度

$$\frac{1}{2}r^2 d\theta$$

文化・教養

3_4_無限空間のGaussianの積分

速さに比例する抵抗を受けながら落下する物体の運動を考える。鉛直下向きにx軸をとる。

$$m\ddot{x} = -C\dot{x} + mg \Rightarrow m\dot{v} = -Cv + mg$$

$$u(t) = v - \frac{mg}{C} \Rightarrow m\dot{u} = -Cu$$

$$u = Ae^{-Ct/m} \Rightarrow v = \frac{mg}{C} + Ae^{-Ct/m}$$

$$v_0 = 0 \Rightarrow v = \frac{mg}{C}\left(1 - e^{-Ct/m}\right)$$

$$\Rightarrow v_\infty = \frac{mg}{C}$$

$$x = \frac{mg}{C}t - \frac{m^2 g}{C^2}\left(1 - e^{-Ct/m}\right)$$

落下する雨粒は摩擦をうけてある速度に落ち着く。

1.14 万有引力と惑星の運動

・ 重要なキーワード

＊ 万有引力

＊ 万有引力定数

＊ 中心力

$$F_r = -G\frac{mm'}{r^2}$$

$$G = 6.67259\times10^{-11} m^3/(kg\cdot s^2)$$

$$U = -G\frac{mm'}{r}$$

M: 太陽の質量, m：惑星の質量

$$-G\frac{Mm}{r^2} = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$

$$0 = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$$

第2式より、面積速度が一定

（ケプラーの第2法則）

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad h = r^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} r - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}$$

$$\frac{h^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{r}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{GM}{h^2} \quad \Rightarrow \quad u - \frac{GM}{h^2} = w$$

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = 0 \Rightarrow w = C\cos(\theta + \alpha)$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{l}{1 + e\cos(\theta + \alpha)}, where \quad l = \frac{h^2}{GM}, \quad e = \frac{h^2 C}{GM}$$

原点を焦点とする離心率eの円錐運動を表す

惑星は太陽を焦点とする楕円軌道を描いて運動する
(ケプラーの第1法則)

$$r = \frac{l}{1+e\cos\theta}$$:楕円

$$\frac{l}{1-e^{2}}$$:長半径

$$\frac{l}{\sqrt{1-e^{2}}}$$:短半径

$$\frac{\pi l^{2}}{\left(1-e^{2}\right)^{3/2}}$$:楕円の面積

$$\frac{2\pi l^2}{h\left(1-e^2\right)^{3/2}}$$:周期 T

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \times$$ (長半径)³

公転周期の2乗は軌道の長半径の3乗に比例する
(ケプラーの第3法則)

観測事実をニュートンの法則と運動方程式から
理論的に導出できた

文化・教養

３_４_ケプラー