1.9 仕事と運動エネルギー

・ a_t ：速さの変化に関係がある
・ a_n ：運動方向の変化だけに関係する

これから、速さの変化を引き起こすのは力 F のうちの接線成分 F_t だけである。

$$\frac{m}{2}\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \sum_{i=0}^{n-1} m \frac{\Delta v_i}{\Delta t_i} \Delta s \Rightarrow \int_A^B m \frac{dv}{dt} ds$$

$$\Rightarrow \int_A^B F_t ds$$

：仕事 (力FがAからBまでの間にこの質点に対して行うもの)

・ 力 (質点にはたらくすべての力の合力) のした仕事はその間における運動エネルギーの変化高に等しい

・ 仕事

・ 運動エネルギー

・ベクトルのスカラー積 (内積)

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = ab\cos\theta$$

二つのベクトルが直交する場合、内積は0となる。

1.10　束縛運動

・重要なキーワード

＊　摩擦係数

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g(\sin\phi - \mu\cos\phi)$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{ds}{dt} = g(\sin\phi - \mu\cos\phi)t$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}g(\sin\phi - \mu\cos\phi)t^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(\sin\phi - \mu\cos\phi)s$$

$$B - A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\left(v_B{}^2 - v_A{}^2\right) = mg(\sin\phi - \mu\cos\phi)(s_B - s_A)$$

○　別の導出法

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = a \quad (= const)$$

$$\frac{ds}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2} = a\frac{ds}{dt}$$

$$v\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{d}{dt}(as)$$

tで積分すると、

$$\frac{1}{2}v^2 - as = const$$

1.11 保存力とポテンシャル

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B \left(F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz \right)$$

・ 一様な重力場や、力が原点からの距離に比例する大きさを持ち原点に向かう引力の場合では、仕事は途中の道筋によらず、両端の位置だけで表すことができる。

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = U(x_A, y_A, z_A) - U(x_B, y_B, z_B)$$

この力のことを保存力といい、その力をポテンシャルという。

キーワード

- 保存力　仕事が途中の道筋によらず
  両端の位置だけの関数
- ポテンシャル
- 仕事の原理

物理に使う数学(2)

- 関数の偏微分
  ＊　grad （勾配、gradient）
  ＊　∇　という記号は
  　　ナブラと読む

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1.12　位置のエネルギー

・　重要なキーワード

　＊　力の場：　場所ごとに決まった力F（x、y、z）が与えられる空間

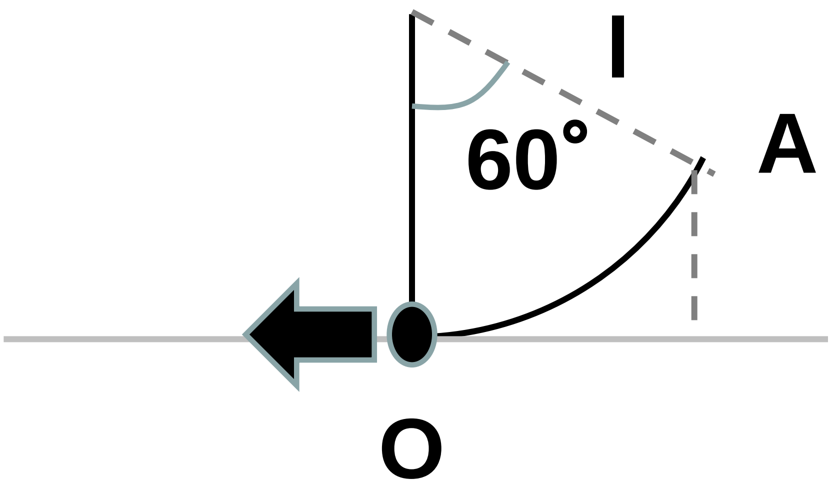
　＊　位置のエネルギー　(ポテンシャルエネルギー)

　＊　力学的エネルギー

・　力学的エネルギーの保存則

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2+U\left(\vec{r}_B\right)=\frac{1}{2}m{v_A}^2+U\left(\vec{r}_A\right)$$

p30の例



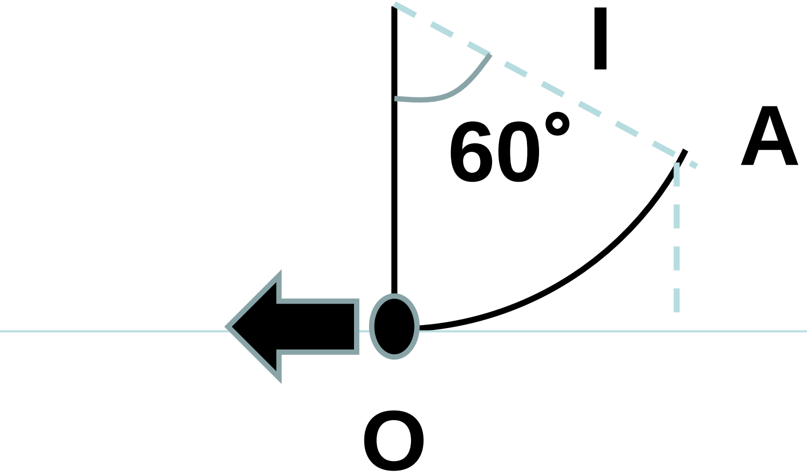
糸の長さlの単振り子
糸が鉛直と60°の角を作る
位置Aで、重りを静かに放す

おもり（質量m）が最下点を
とおるときの速度をv_0とすると

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}mgl$$

$$v_0 = \sqrt{gl}$$

糸にかかる張力



O点における張力：S_0

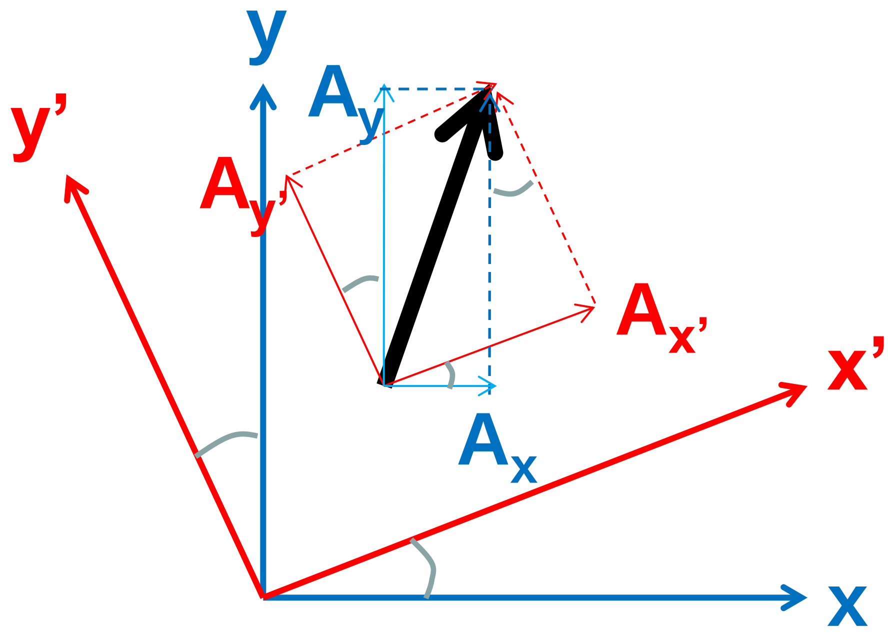
S_0 ＝mg＋遠心力

遠心力：　mv_0^2/l

＝mg

つまり、$S_0 = 2mg$

1.13 平面運動の極座標表示



二次元ベクトルの分解

$$A_{x'} = A_x \cos\theta + A_y \sin\theta$$

$$A_{y'} = -A_x \sin\theta + A_y \cos\theta$$

$$A_x = A_{x'} \cos\theta - A_{y'} \sin\theta$$

$$A_y = A_{x'} \sin\theta + A_{y'} \cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \tilde{E} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix}$$

・速度を極座標で表す

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$v_x = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$v_y = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$\dot{\theta}$

角速度

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta$$

$$v_\theta = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta$$

・加速度を極座標で表す

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$ とも書くことができる

・ a_t=0 → 面積速度 $\frac{1}{2}r^2 d\theta$

文化・教養

3_4_無限空間のGaussianの積分

○　宿題 (4)

教科書力学P41の１章の問題：（4, 6, 8）のうち二つについて解を求めよ。なお途中のプロセスを含めて記述すること。

締切：　10月30日(水)17時まで。3417室。
A4サイズ