物理学Ⅰ

第14回　2014年1月9日（木）

3.7 静止流体の圧力

・気体と液体を流体と総称
・流体と固体との違い：
静止状態の液体内部の応力には接線成分がなく、同じ点における応力は面の方向によらず同じ強さの圧力になっていることである。

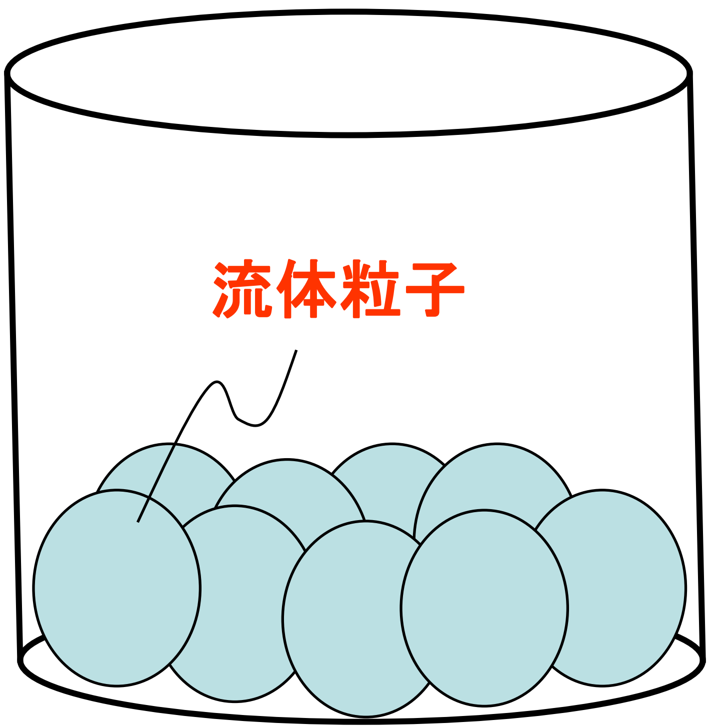
例： 地上の大気圧は1013hPaである。この圧力の大きさは鉛直方向にも水平方向にも同じである。

・p98： 理想的な液体は縮まない流体
気体は縮む流体

圧力(気圧) とは? （単位　Pa = N m^{-2} ）

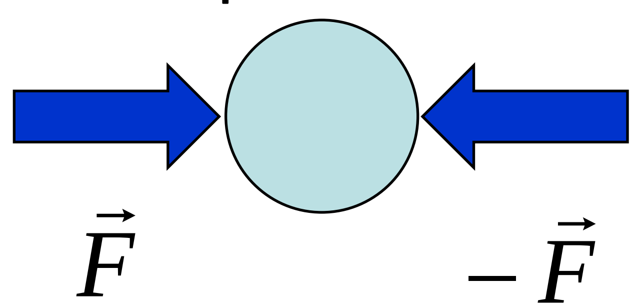
Pa: Pascal。圧力の単位。次元量; kg m^{-1} s^{-2}　単位面積当たりの力。
N: Newton。力の単位。次元量;　kg m s^{-2}　力は質量と加速度の積。

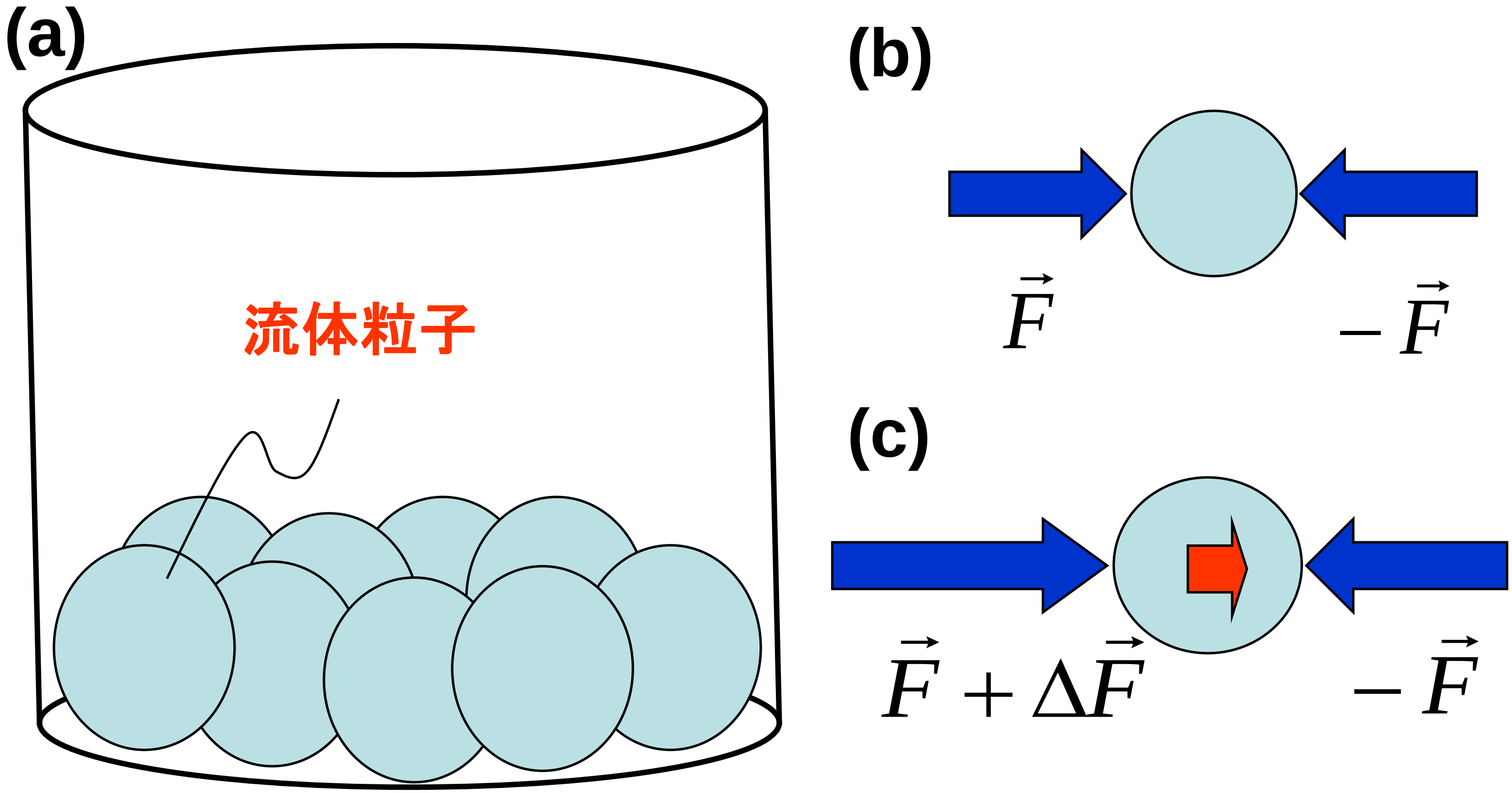
流体は沢山の流体粒子の集合と考えることができる。その場合、流体粒子はお互い密接に隣り合って力を及ぼしあっていると考えることができる。
(例:ラッシュアワーの電車の中における人間は流体粒子に対応)



ここでコップに満たした沢山の静止した流体粒子を考える。この場合、お互い力を同じ強さで逆向きに及ぼしあっていて、トータルで打ち消しあっている.
このバランスを圧力pで記述すると、

$$dp/dx = 0$$

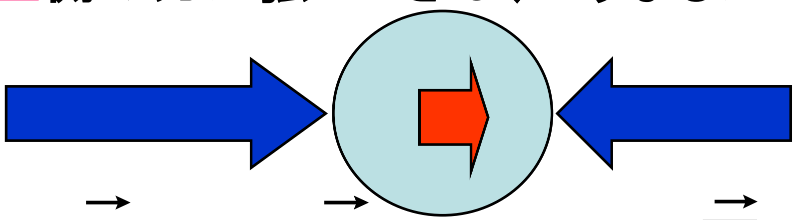




(a)
流体粒子
(b)
$\vec{F}$
$-\vec{F}$
(c)
$\vec{F} + \Delta\vec{F}$
$-\vec{F}$
Δx

圧力(気圧)傾度力 とは?

もし左側の力が強いときは、どうなるか？ → 右に動かそうという加速度が働く



$$\vec{F} + \Delta\vec{F} \qquad\qquad -\vec{F}$$

$\longrightarrow$ **x**

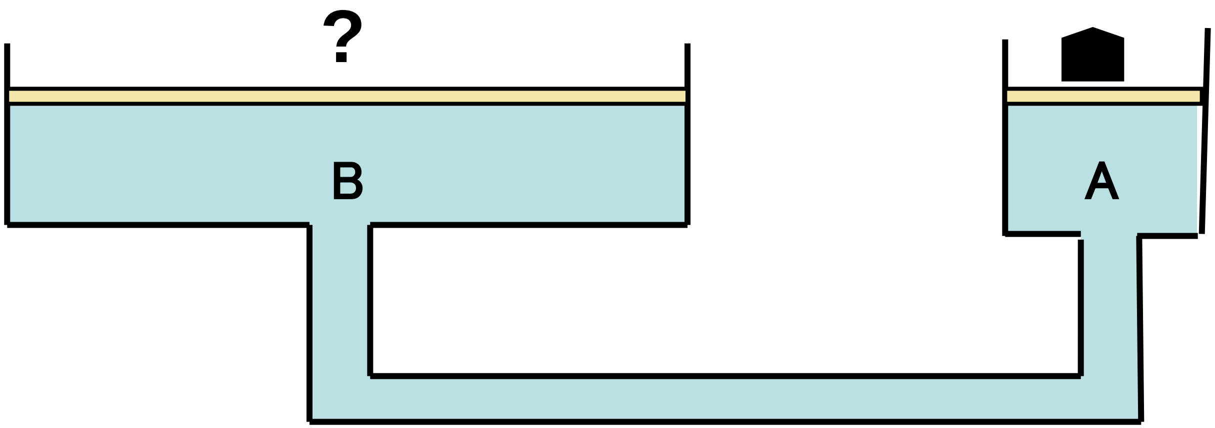
$$\frac{du}{dt} \propto -\frac{d\,p}{d\,x}$$

流体の場合、気圧の大きさの傾き（＝気圧傾度力）が加速度を作るもととなる。
気圧傾度力は近接力であり、流体の運動を記述する場合に出てくる特徴である。

圧力傾度力は流体運動ではエッセンシャルである

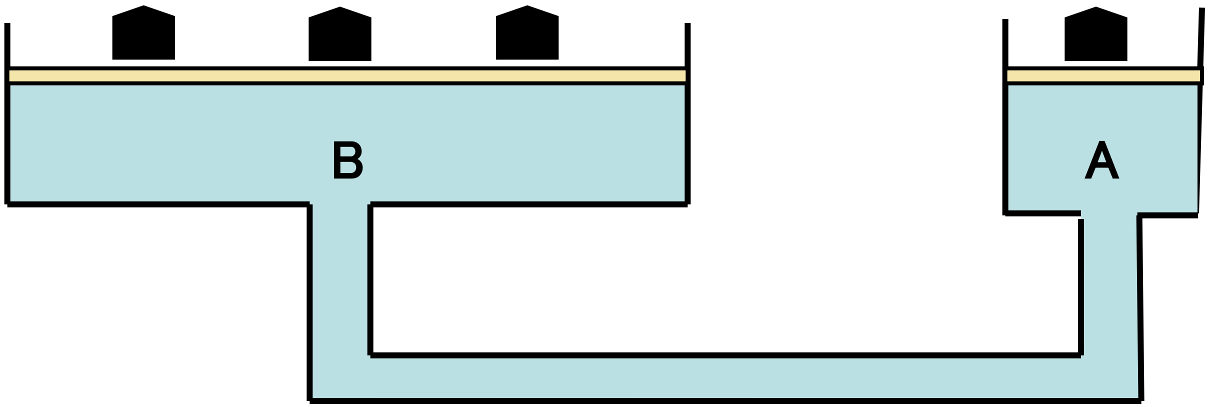
パスカルの原理

問題:
管を通して二つの貯水槽(A,B)がある。Bの貯水槽の面積をSとすると、Bの貯水槽の面積は3倍の大きさであった。Aに重りを一つ置くとすると、Bには何個の重りが必要か?



パスカルの原理

答え:



重りの重さをM(kg)、Aの面積をS(m^2)、重力加速度g(ms^{-2})とすると、
圧力(＝重力加速度×質量／面積)g M/S(ms^{-2}・kg・m^{-2}＝kg m^{-1} s^{-2}＝
N m^{-2})が一定であるには、Bには3個の重りが必要である。仕事でいうと、
もしAの水位がh(m)変わるとすると、Bの水位はh/3だけ変わる。
A: Mgh　B: (3M)g(h/3)=Mgh となり、同じ仕事をしたことになる

この応用: エアポンプ、クレーン、車のジャッキ

3.8 流速の場

・流体の速度　V（x、y、z、t）

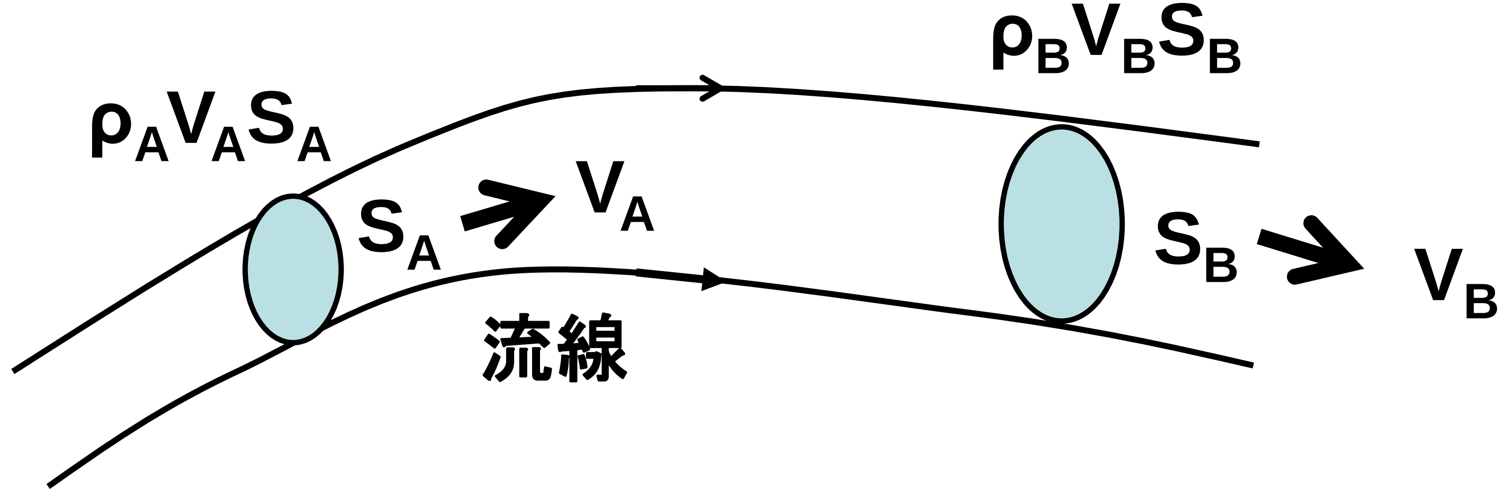
・液体と固体との違い：

静止状態の液体内部の応力には接線成分がなく、同じ点における応力は面の方向によらず同じ強さの圧力になっていることである。

例：　地上の大気圧は1013hPaである。この圧力の大きさは鉛直方向にも水平方向にも同じである。

・p98：　理想的な液体は縮まない流体
気体は縮む流体

3-17図　(p101)



完全流体　・・・　粘性の全くない流体
定常流では流線や流管が定義できる

ρVS＝一定

連続の式

基礎方程式

流体の運動を論ずるのに、二つの立場がある。

1） ラグランジュ的な方法： ある流体粒子の時々刻々の位置を追跡し、これを粒子の最初の位置と時間の関数として記述しようとする立場。粒子の保存量の場合の追跡には適している。

2) オイラー的な方法： 流体粒子は時間を自由に移動するが、空間の各点各瞬間の流体の流速･圧力･密度を固定座標系の位置の関数として記述する立場

⇒ オイラー的な方法が一般的

オイラーの運動方程式

質量力を　$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$　とすると、

$$\frac{Du}{Dt} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

重力場では必要

$$\frac{Dw}{Dt} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \quad (-g)$$

オイラーの運動方程式（Euler's equation of motion）
（x、y、z）方向の流れを（u, v, w)とすると
力はベクトル量　⇒　F = a + b + c +….　と和となる！

日野幹雄「流体力学」より

ナビエ・ストークスの方程式

流体の運動を記述するのが、NS方程式である。
気圧傾度力と粘性力を取り込んだ式となる。

$$\frac{Du}{Dt} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

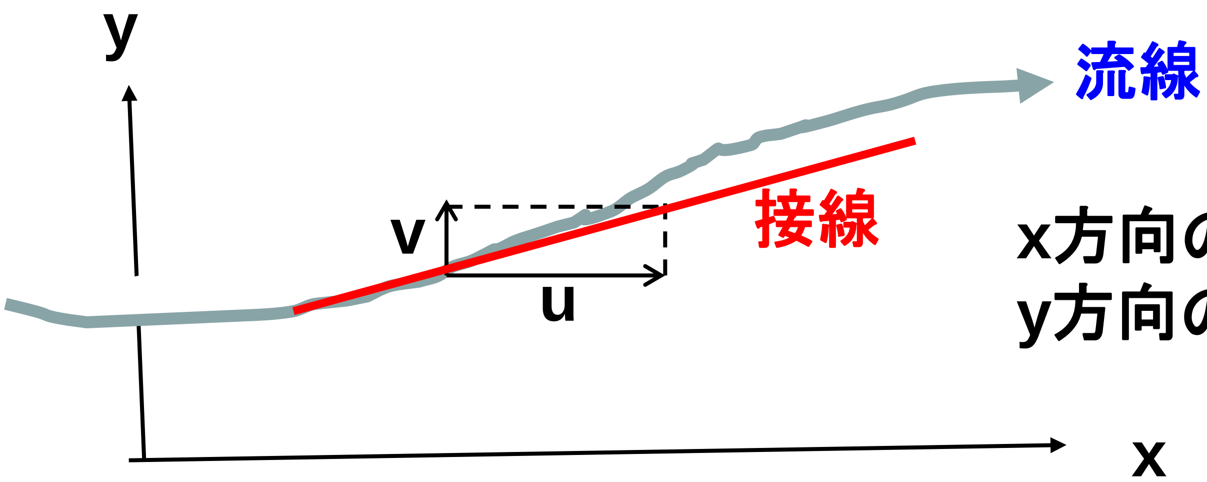
ただし、粘性係数　ν　は定数とした。

3.9 ベルヌーイの定理

流線と流管

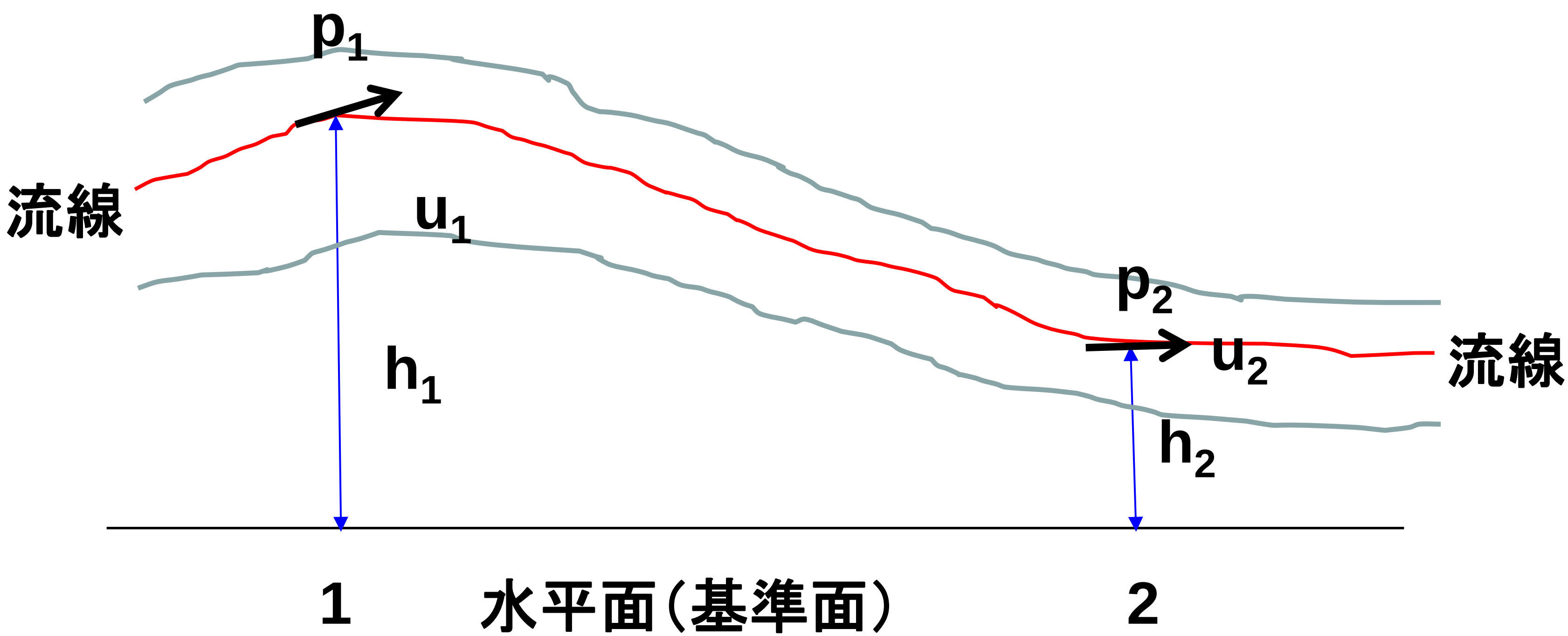
流線は糸のように、
流管は糸の集まり

流線：　お互い交差しない
流管：　流線を束ねたもの
流管の側壁から飛び出す流線はない



x方向の流れ：　u
y方向の流れ：　v

重力場で定常な流れでは流線が定義できる。

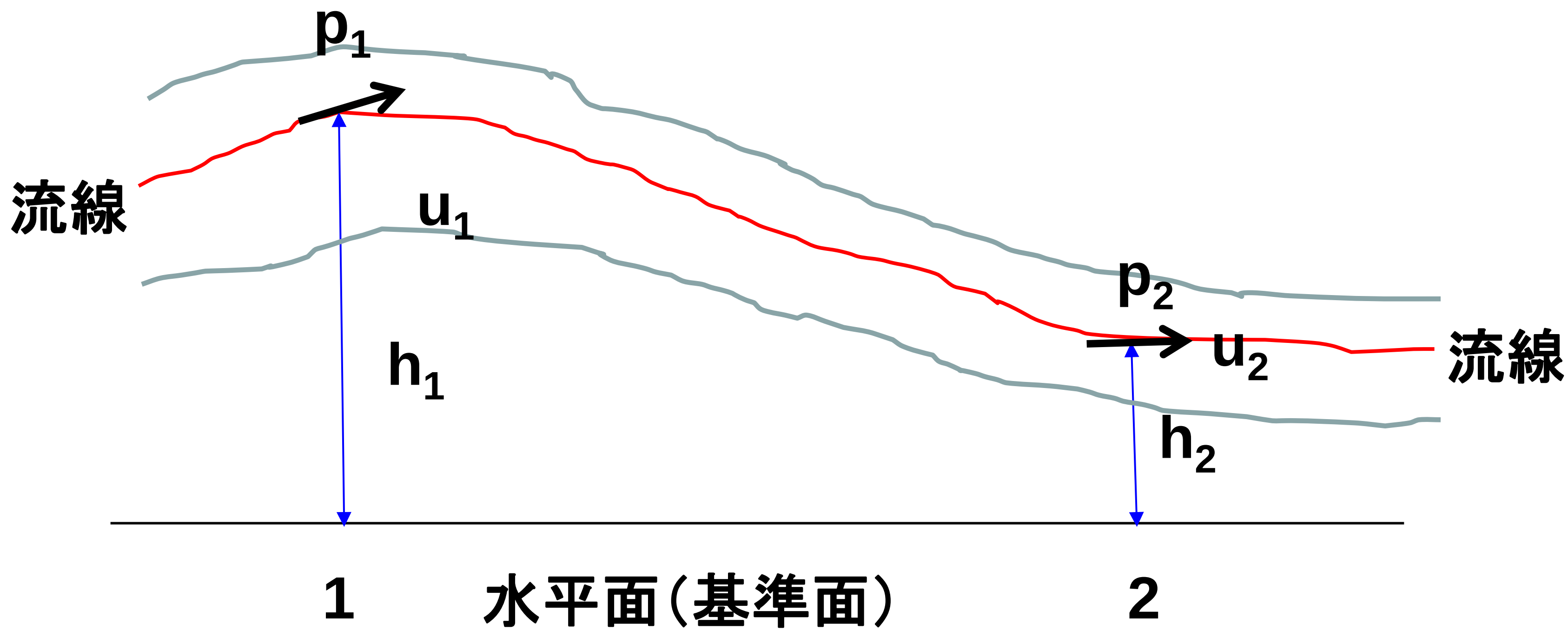


流線に沿って、全エネルギーが保存する。

位置のエネルギー: ρgh

運動エネルギー: $1/2\rho u^2$

圧力エネルギー: p



点1と点2におけるエネルギー保存則：

$\rho\ gh_1\ +\ 1/2\rho\ u_1^2\ +p_1\ =\rho\ gh_2\ +\ 1/2\rho\ u_2^2\ +p_2$

一般に**ベルヌーイの定理**での表し方（密度の変化のない）

$$h_1+\frac{u_1^{\ 2}}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}=h_2+\frac{u_2^{\ 2}}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}$$ ＝どこでも一定

オイラーの運動方程式からベルヌーイの式が導ける

流線sに沿ってオイラーの運動方程式を表すと、

$$\rho u \frac{du}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s$$

加速度項（移流）　圧力差による力　重力

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{u^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g_s$$

流線に沿って積分をすると、

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} dp + gz \quad = \quad 一定$$

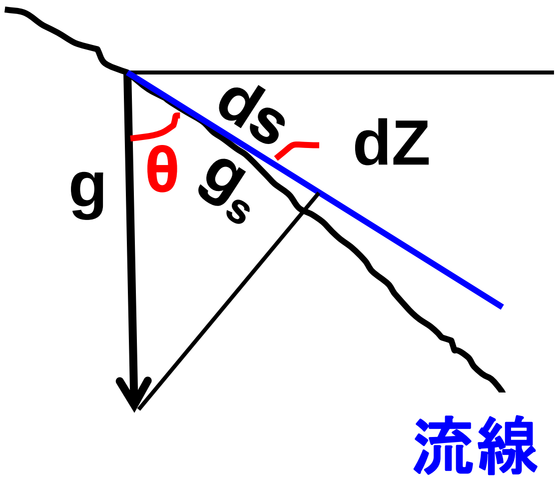
密度＝一定の場合　$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \quad = \quad 一定$$

$$\rho u \frac{du}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s$$

g_sの変形

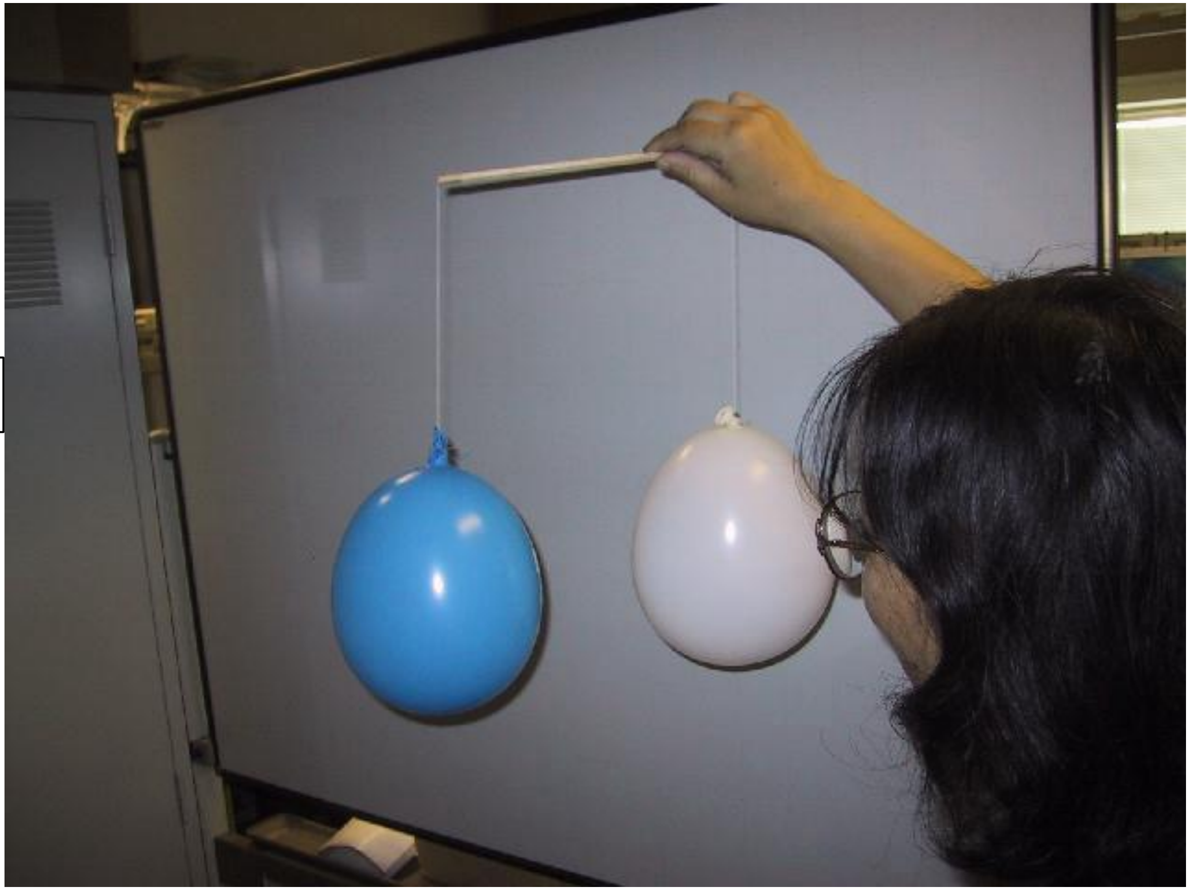
$$\cos\theta = dz/ds$$

$$g_s = g\cos\theta = g\,dz/ds$$



ベルヌーイの定理の応用

図３



流れの物理学　関眞佐子　より

physics.gep.kansai-u.ac.jp/~physics/jugyo/seki/bunkei02.htm

ベルヌーイの定理の実験

二つの風船をつるして、その間に息を吹きかける。二つの風船は

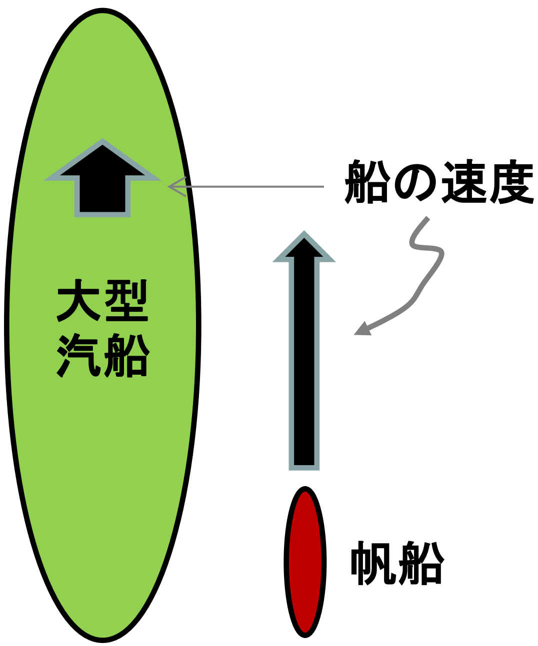
（1） お互い離れる、
（2） 変わらない、
（3） お互いくっつく

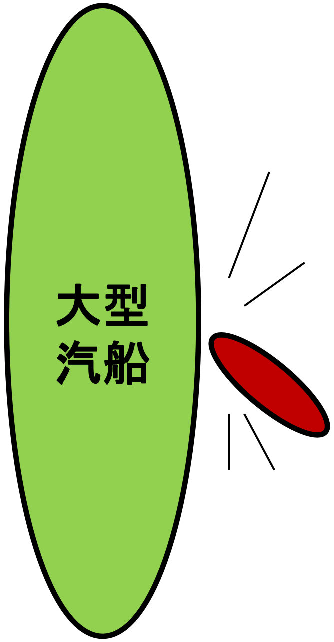
のうち、どれだろうか？

船が引きあう

並走する二隻の船の奇妙な衝突事故

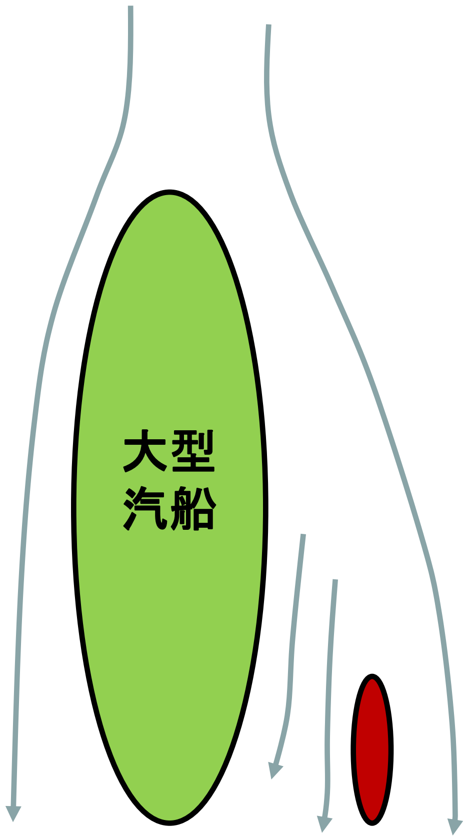
1911年秋　イギリス近海をゆっくり航行していた大型汽船「オリンピック号」のそばを小さな帆船が速い速度で通り過ぎようとした。帆船が追いついたとき、突然恐ろしいことが起こった。





帆船の船首がひとりでに大型船の方に向きを変え、大型船の船腹に突っ込んでいった。舵を反対側にとって衝突を避けようとしても無駄であった。

大型汽船に相対的な流れ



船が引きあう要因

両船の間の流れが速くなりそこでの圧力が低下し、その結果水位が下がり小船が大型船に引き寄せられたと考えられる。

木田重雄　　いまさら流体力学？

● ベルヌーイの定理の応用

(i)トリチェリ(Torricellli, 1644)の定理;

流出口Bを通る流線をさかのぼると、

必ず水面のある一点Aに達する。流速をqとすると

$$\frac{q_A^{\;2}}{2}+\frac{p_A}{\rho}+g\,z_A=\frac{q_B^{\;2}}{2}+\frac{p_B}{\rho}+g\,z_B$$

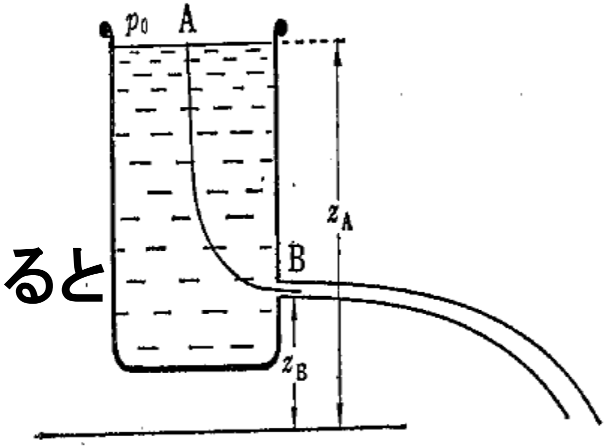


図 14 水槽からの流出

q_B>>q_Aとして、p_Aもp_Bも大気圧p_0に等しいとすると、

$$q_B=\sqrt{2g\left(z_A-z_B\right)}$$

日野幹雄「流体力学」より

● ベルヌーイの定理の応用

二つの風船の間の流れの実験

流れと圧力は独立ではなく、関係しあう

流れが強い(弱い)と圧力は小さい(大きい)

(ii)ピトー(Pitot, 1732)管:

流れの中に前面が丸みを帯びた物体を置くと、流れはよどみ点でせき止められる、よどみ点では流速が0で、高度差を無視すると、

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1{}^2 = p_2$$

p_2 静圧　　p_1 動圧

$p_2 + p_1$ 総圧 (total pressure)

・ピトー管は総圧と静圧を測定することによって流速を求める計測器
・ピトー管は水や空気などの流速測定ができる
⇒　飛行機に不可欠な速度計

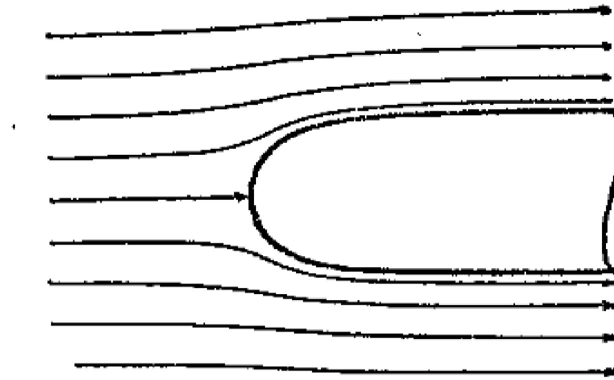
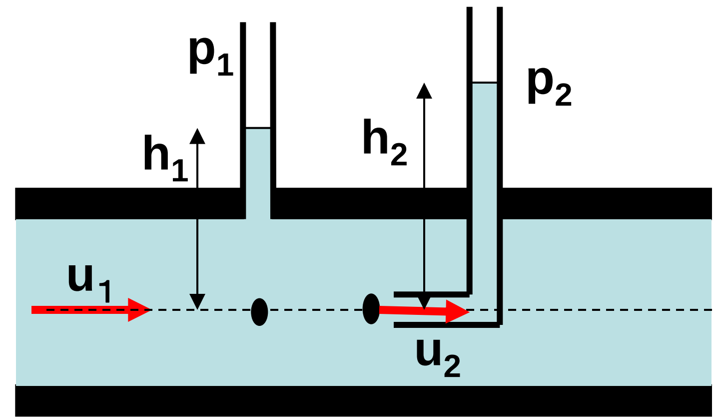


図 15　丸みをおびた物体まわりの流れ



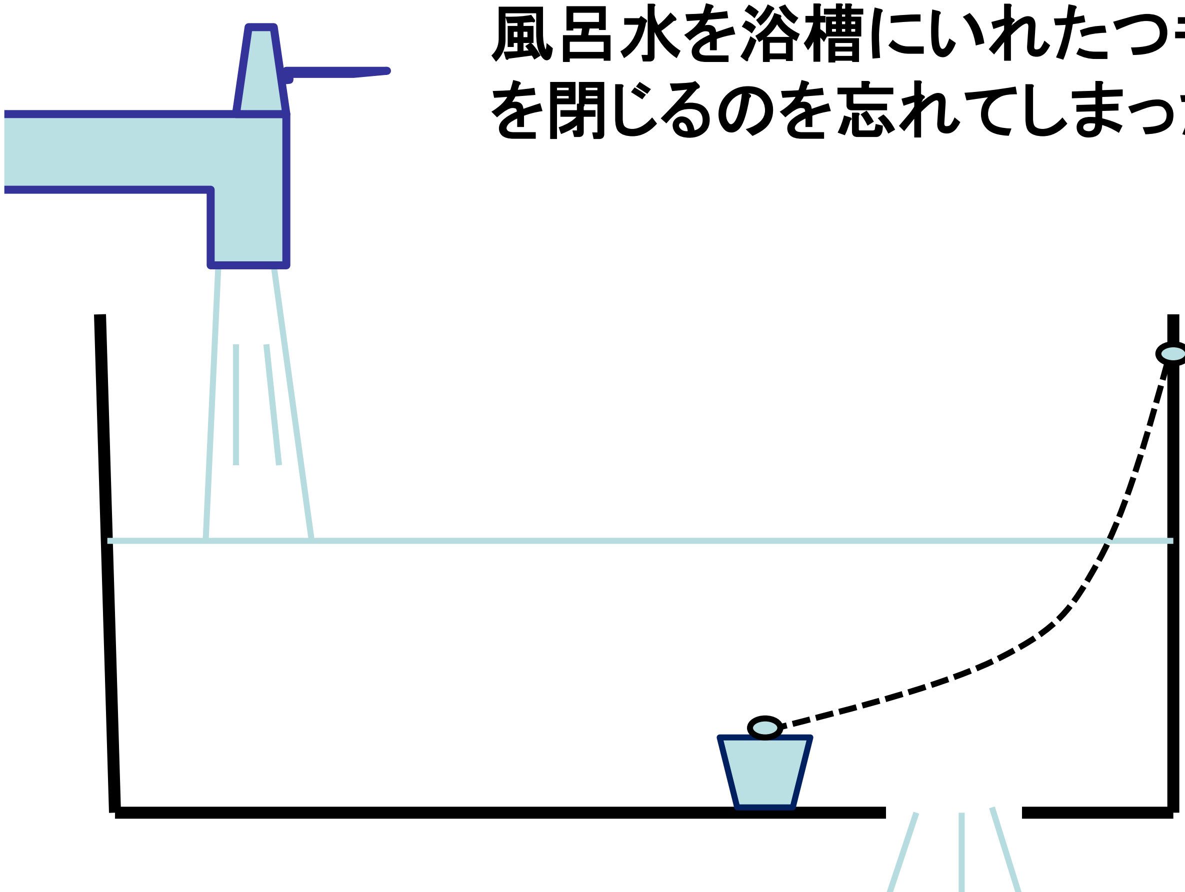
$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p_1)}$$

トコトンやさしい流体力学の本
久保田浪之介

水は張る問題

20年近く前の中学校の入試問題(だそうだ)

木田重雄　いまさら流体力学？　丸善



風呂水を浴槽にいれたつもりが排水栓を閉じるのを忘れてしまった。

浴槽は給水蛇口から一定の割合で水を入れると2時間で満杯となる大きさである。また排水口は満杯の浴槽をからにするのに3時間かかる。
ある日浴槽に水を張ろうとしてうっかり排水栓を閉じるのを忘れてしまった。浴槽は蛇口を開いてから何時間後に一杯になるでしょう?

この蛇口からは1時間に浴槽全体の1/2の水が入る。一方、排水口からは1時間につき浴槽の1/3の水が入る。
したがって、蛇口と排水栓の両方を開くと、1時間に浴槽には1/2－1/3＝1/6の水がたまってゆくから、浴槽は6時間で満杯になる。

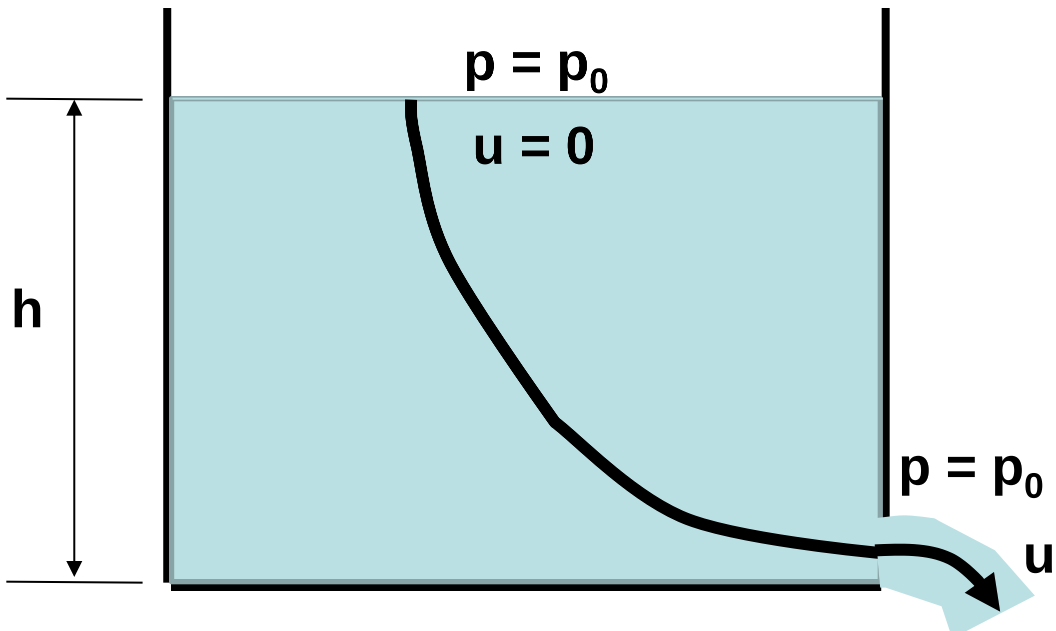
答え: 6時間。

一見これで良さそうに思われる。この問題の出題者はおそらく、以上のような解答を期待していたであろう。

しかしこの問題はそう単純ではなかった。
実はこの場合浴槽はいつまでたっても一杯にならないのである。

そこでは排水の流量の速度uが一定とあると思ったからである。ところが、浴槽のような設定ではuは一定ではないのである。

トリチェリの定理



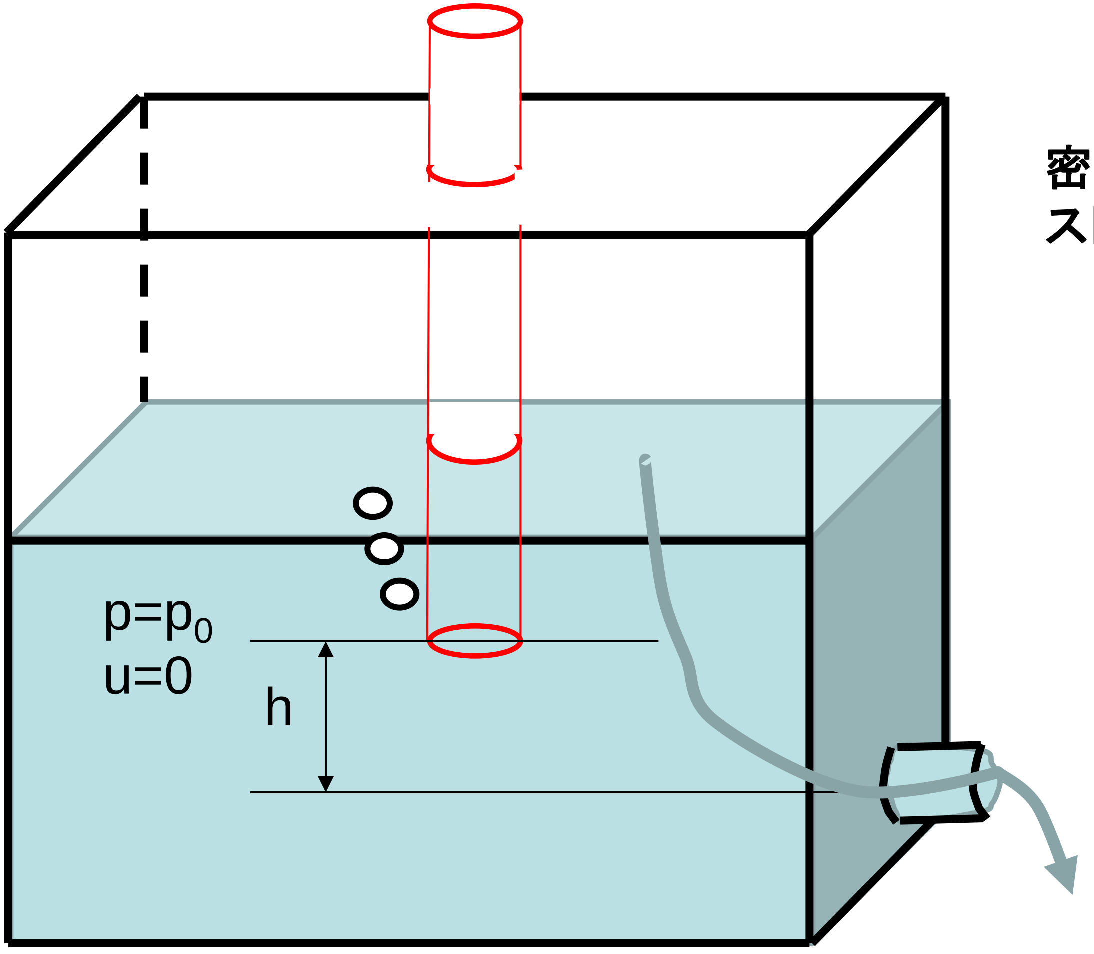
水槽の下部にあいた小さな排出口における速度u:

$$u = \sqrt{2gh}$$

重力場gの中で高さhから落とされた物体の速度に対応する

木田重雄　　いまさら流体力学？

マリオットの器
ー　水深が変わっても常に一定の速度で水が流出する器　ー



密閉した箱（樽）と
ストローで作る

p=p_0
u=$\sqrt{2gh}$

木田重雄　　いまさら流体力学？

調和級数　忽然と現れる円周率