

○ 大気の運動： 中立波動

＊ 1次元

- ・ 単振動
- ・ 強制振動
- ・ 減衰振動
- ・ パラメータ励振（ブランコ）

○ 1次元単振動

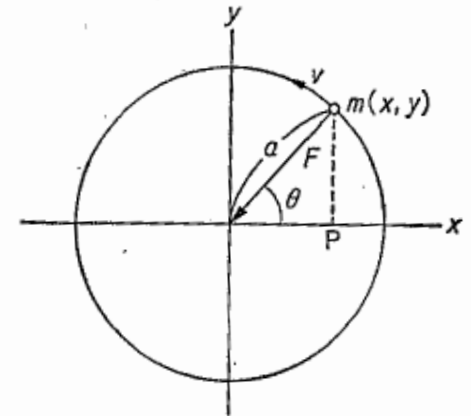
振り子、あるいはばねのついた質点

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- ・この場合、 $\omega^2 > 0$ 定数。
m は質点、x は変位、t は時間。
- ・“ $-kx$ ”は原点に向かう力(復元力)
- ・この方程式は調和振動あるいは単振動
一般解は

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

AとBは未定。条件を二つ入れると確定する。



1.1 図

○ 1次元の強制振動

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f(t)$$

一般解は $x = c \cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{1}{\omega_0} \int^t f(t') \sin \omega_0 (t - t') dt'$

○ 外力 $f(t) = f_0 \sin \Omega t$ の場合

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \Omega t$$

この一般解は

$$x = c \cos(\omega_0 t + \delta) + f_0 \frac{\sin \Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)}$$

$\omega_0 = \Omega$ の場合

○ そのままでは左辺第2項は $\frac{*}{0}$ となる。そこで

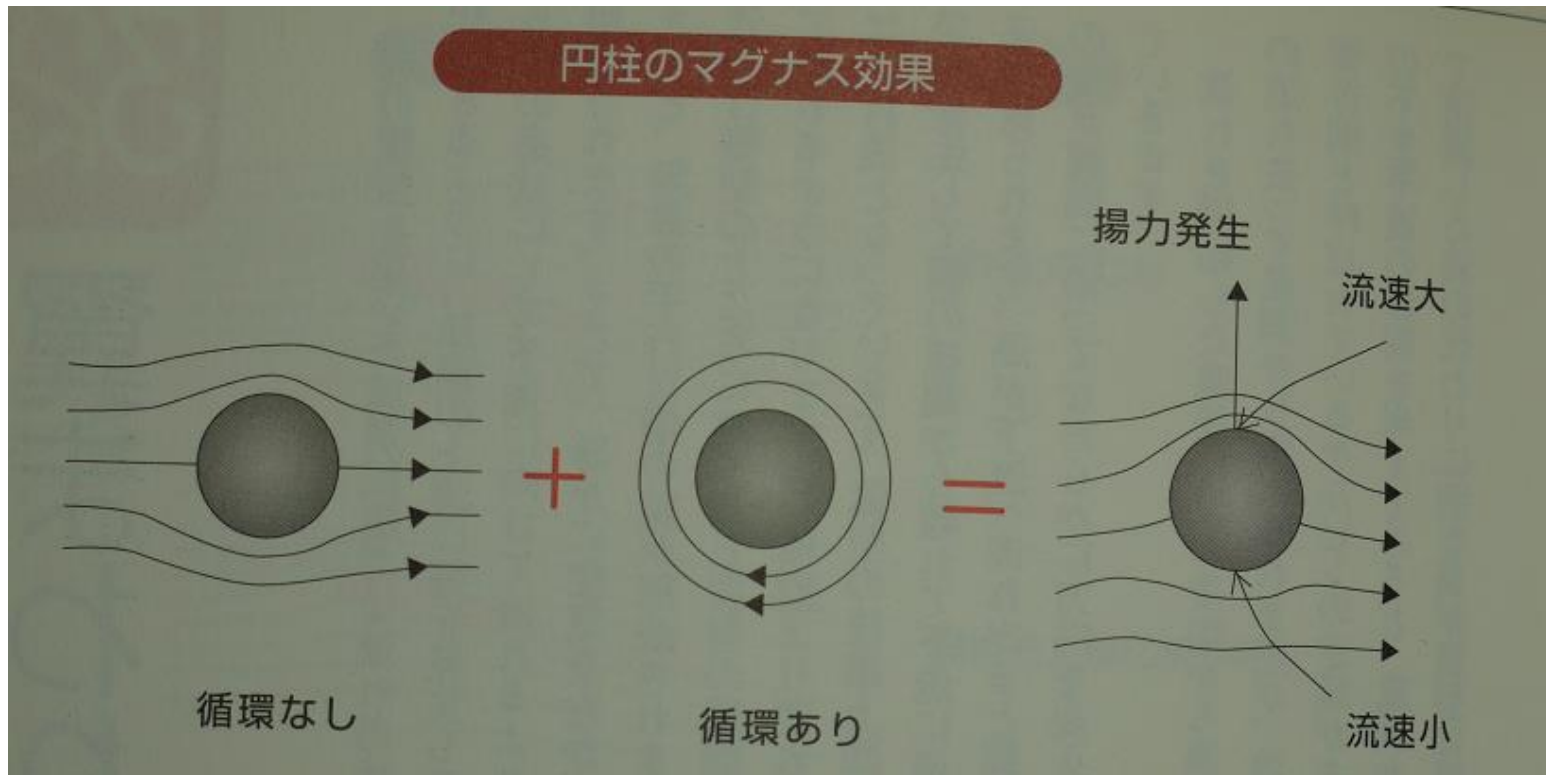
$$x = c' \cos(\omega_0 t + \delta) - f_0 \frac{\sin \omega_0 t - \sin \Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)}$$

第2項は $\Rightarrow \lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} \frac{\sin \omega_0 t - \sin \Omega t}{\omega_0 - \Omega} = t \cos \omega_0 t$

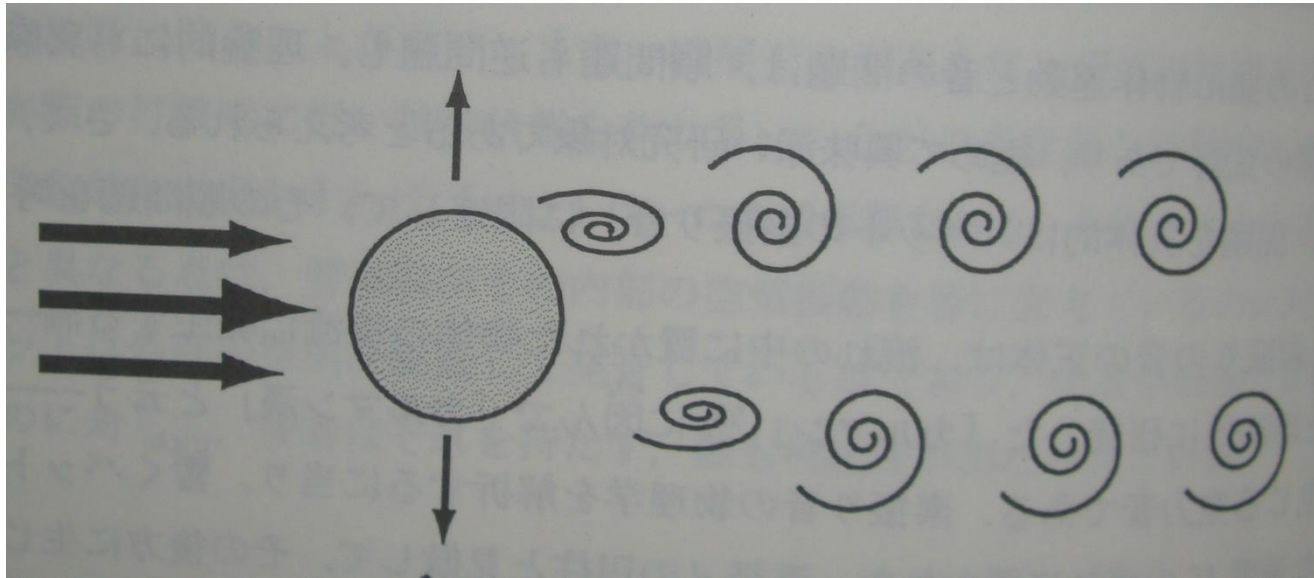
つまり、 $\omega_0 = \Omega$ の場合は時間と共に線型的に増加する解となる

● 循環の概念

理想流体の流れに循環を重ねることにより、上下の流れの強さが変わる。これにより、上下に圧力差が生じ、揚力が発生する



● ベルヌーイの定理 流線に沿って圧力エネルギーと運動エネルギーの全エネルギーは保存する



- ・後方に一つの渦ができると、円柱のまわりに逆向きの渦ができる。**(ケルビンの渦不生不滅の法則)**
- ・後方に一つの渦ができると、逆向きの渦が一般流と一緒にあって、上下に運動エネルギーの違いを生み、ベルヌーイの定理により、圧力が上下にかわることになる ⇒ **揚力の生成**
- ・交互に渦が形成されると、円柱は上下に振動する。
⇒ **カルマン渦**の振動

○ 1次元の減衰振動
速度に比例した $-\alpha \frac{dx}{dt}$

という形の抵抗を考える

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2\gamma = \frac{\alpha}{m} > 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x = e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases}$$

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

三つの場合わけ:

- ・抵抗が小さくて $\gamma < \omega_0$ の場合 $\Rightarrow$ 減衰振動
- ・抵抗が大きくて $\gamma > \omega_0$ の場合 $\Rightarrow$ 過減衰
- ・ $\gamma = \omega_0$ の場合 $\Rightarrow$ 時間とともに小さくなる(臨界減衰)

○ 1次元の減衰運動の中の強制振動

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$$

$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ とおくと、一般解は

$$x = c e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \delta) + \frac{1}{\omega} e^{-\gamma t} \int^t f(t') e^{-\gamma t'} \sin \omega(t - t') dt'$$

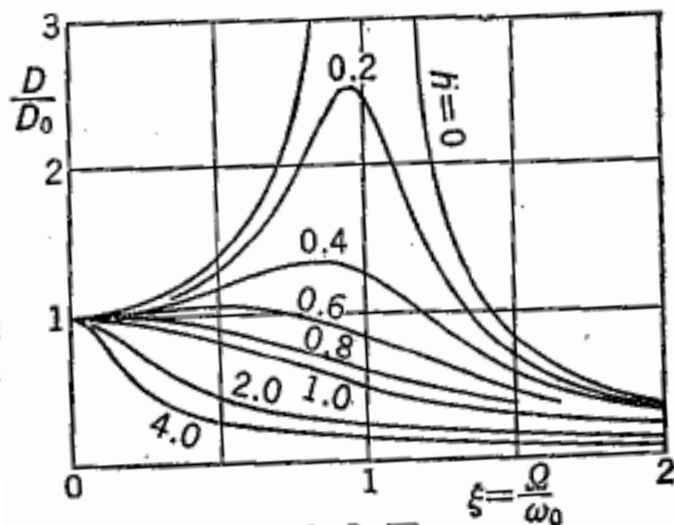
○ 外力 $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 \sin \Omega t$ の場合

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \Omega t$$

この一般解は

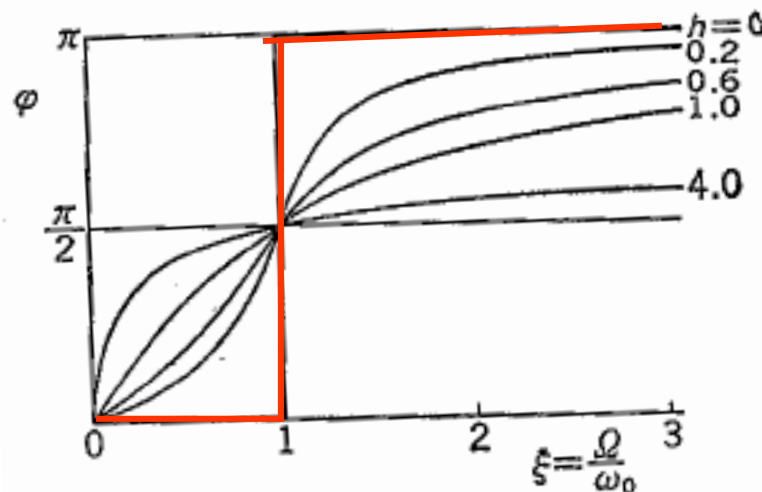
$$\begin{aligned} x &= c e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \delta) + f_0 \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \Omega t - 2\gamma \Omega \cos \Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma \Omega)^2} \\ &= c e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \delta) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma \Omega)^2}} \sin(\Omega t + \varphi) \end{aligned}$$

外力の振動数に対する振幅



1.8 図

外力の振動数に対する位相のずれ



1.9 図

- ・ $h=0, \xi = 1$ (粘性がなく振動数が同じ) 場合、**共鳴が起こり、時間と共に発達する。**
- ・ 位相に関して、**外力の振動数が小さい時は、変位はそれについてゆく。**しかし、 **Ω が大きくなると、外力の変位とは逆 ($\varphi = \pi$) になる。**この境界は $\Omega = \omega$ である。
- ・ 時間がたった時の変位は $x = D \sin(\Omega t + \varphi)$
- ・ 速度は $\dot{x} = \Omega D \cos(\Omega t + \varphi)$ で変位に対して $\pi / 2$ だけ位相が進む

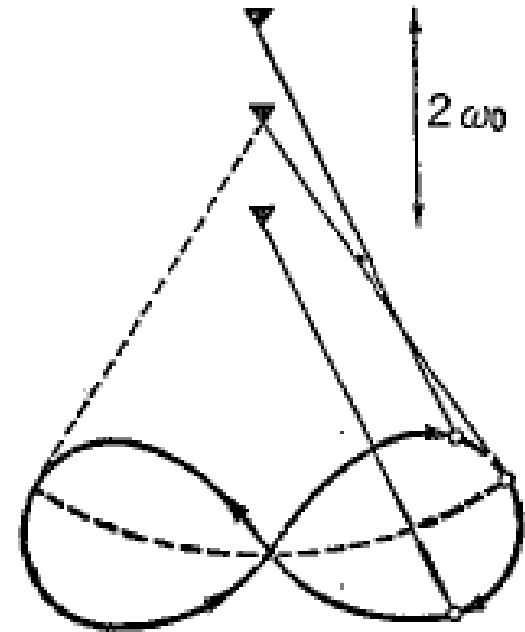
第8回資料

4

○ パラメータ励振

振り子の振動数 ω_0 の2倍で支点を上下させる

$$m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (\omega_0^2 - \alpha \sin 2\omega_0 t) \theta = 0$$



- ・ブランコをこぐときには、ブランコの周期の半分の周期で腰を上下させる。こうして支点から重心までの距離を周期的に変え、ブランコの振幅を大きくすることができる。
- ・単振り子の糸を周期的に長くしたり短くしたりすると、単振り子の振幅が大きくなる。

今までは時間変動だけの振動であった

1次元進行波 ー時間 t と距離 x ー の記述の
仕方を眺める

● 1次元波動の記述の仕方

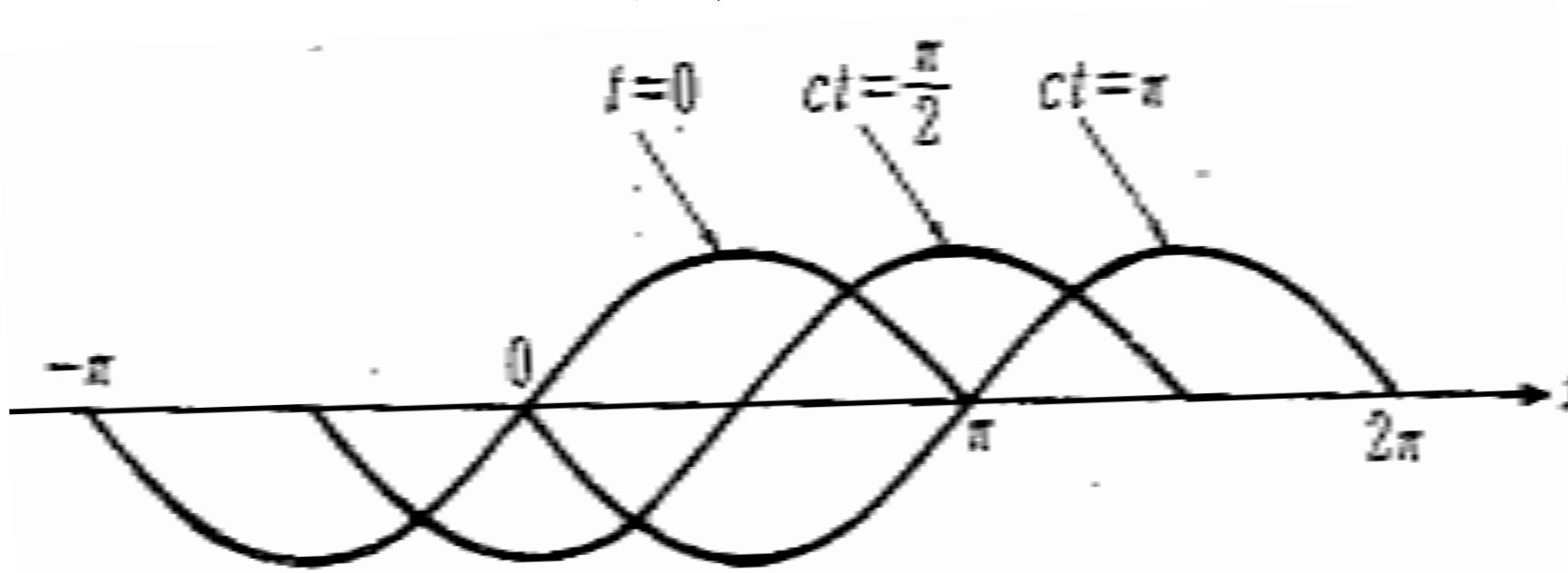
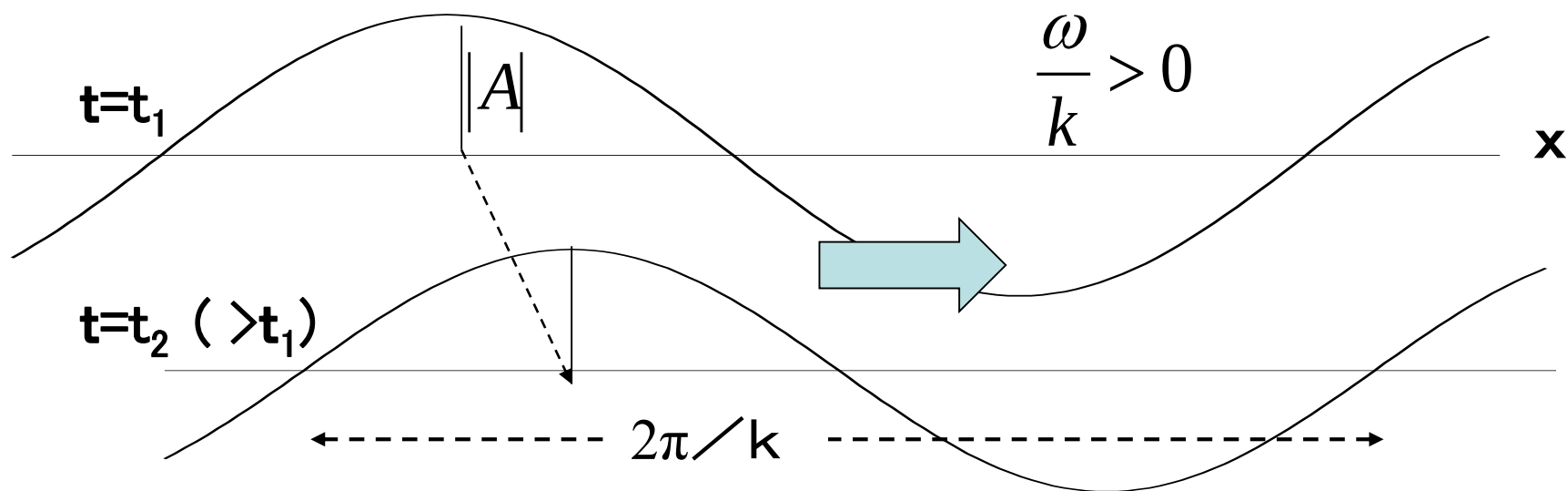


図2.3 x の正の方向に位相速度 c で伝播している三角関数型の波。

○一つの単色波の伝搬

$$\eta = \text{Re}(A \exp \{i(kx - \omega t)\})$$



$$\eta = |A| \cos(kx - \omega t + \delta) \text{ where } |A|^2 = A_r^2 + A_i^2, \tan \delta = \frac{A_i}{A_r}$$

$$\begin{aligned} \eta' &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) \\ &= 2A \sin kx \cos \omega t \end{aligned}$$

進行波と後退波の
和は停滞波となる

○二つの単色波の重ね合わせ

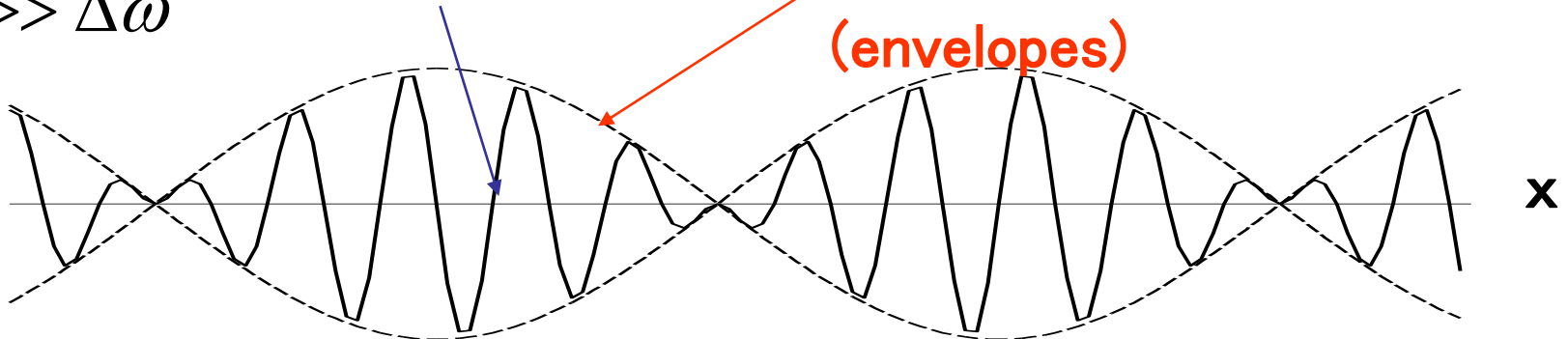
$$\begin{aligned}
 \eta &= \sin \left\{ \left(k_0 + \frac{1}{2} \Delta k \right) x - \left(\omega_0 + \frac{1}{2} \Delta \omega \right) t \right\} \\
 &+ \sin \left\{ \left(k_0 - \frac{1}{2} \Delta k \right) x - \left(\omega_0 - \frac{1}{2} \Delta \omega \right) t \right\} \\
 &= 2 \sin (k_0 x - \omega_0 t) \cos (\Delta k x - \Delta \omega t)
 \end{aligned}$$

$$k_0 \gg \Delta k$$

$$\omega_0 \gg \Delta \omega$$

搬送波
(carrier waves)

包絡線 → 振幅を表し
エネルギーに関する
(envelopes)



第8回資料

仮定

9

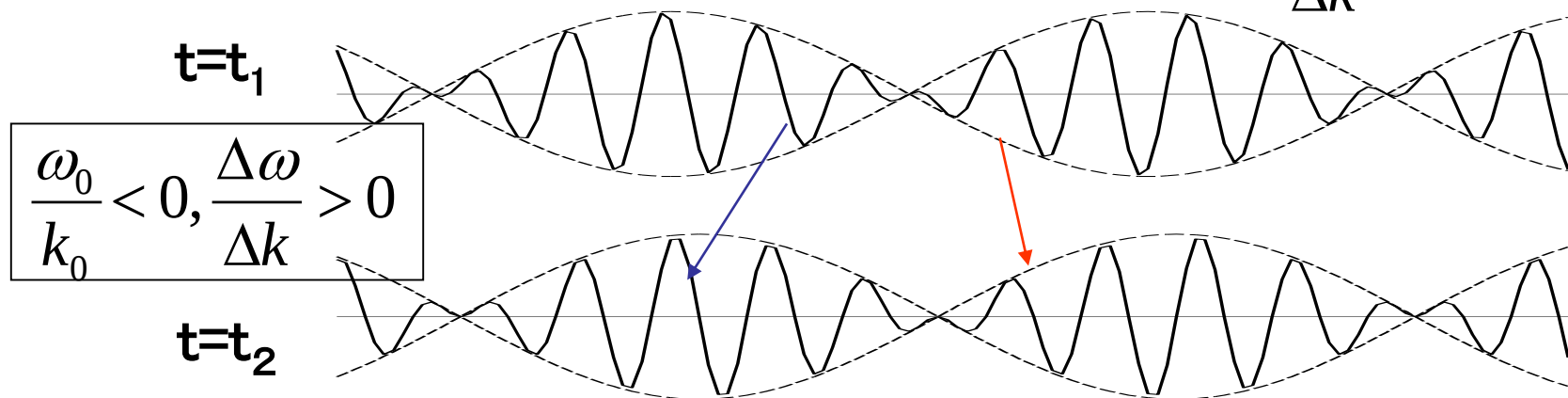
$$k_0 \gg \Delta k$$

○二つの速度が定義される:

$$\frac{\omega_0}{k_0} : \text{位相速度}$$

$$\omega_0 \gg \Delta \omega$$

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta k} : \text{群速度}$$

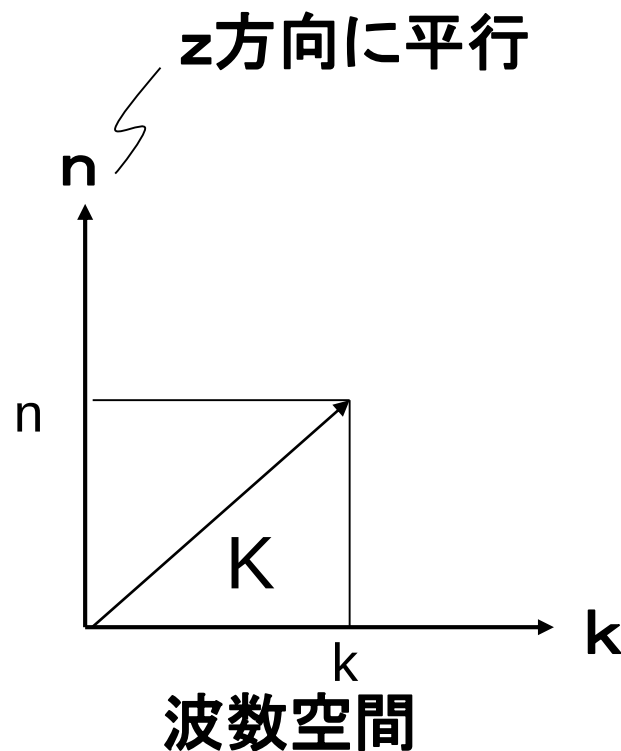
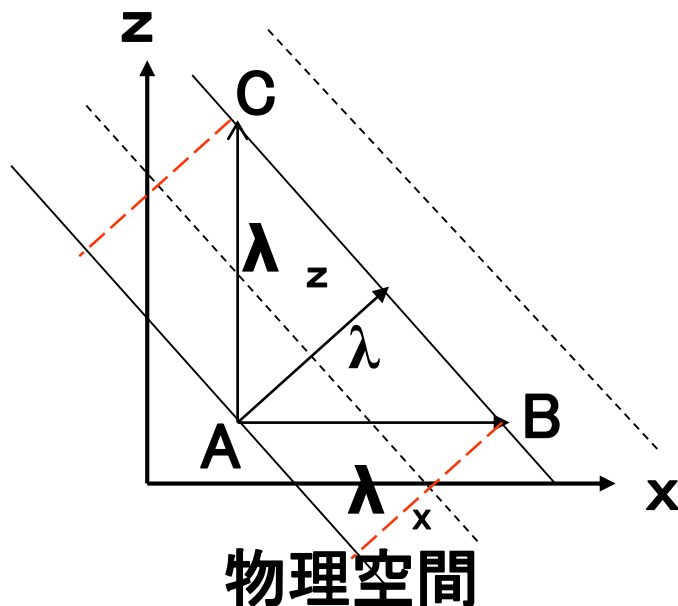


○ 複数の波動の重ね合わせ: $\omega = f(k)$: 分散関係

$$\frac{\omega}{k} = \begin{cases} k \text{ に依存しない} \cdots \cdots \text{非分散} \\ k \text{ に依存する} \cdots \cdots \text{分散性がある} \end{cases}$$

$$c_{gx} = \frac{d\omega}{dk} : \text{群速度 (エネルギーの速度)} \neq \frac{\omega}{k} \equiv c_x : \text{位相速度}$$

●2次元波動



三角形ABCの面積S

$$(2S)^2 = \lambda_x^2 \lambda_z^2 = \lambda^2 (\lambda_x^2 + \lambda_z^2)$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_z}\right)^2$$

$$\vec{K} = (k, n) \equiv \left(\frac{2\pi}{\lambda_x}, \frac{2\pi}{\lambda_z} \right)$$

$$\Rightarrow K^2 = k^2 + n^2$$

波数空間で考える方がベクトルとしてわかりやすい！

● **同高度**で異なる密度をもつ空気塊がある場合、どちらが重いかどうかは、空気塊の重さ、つまり、その密度 ρ で判断する。軽い密度(高温)の 空気塊の方が重い(低温)空気塊より上向きの力を得る(その力を「**浮力**」という)。

気体の状態方程式より $p \propto \rho T \rightarrow \rho \propto 1/T$ (p が同圧の場合)

● **異なる高度**にある空気塊間の**浮力**は？

→ 空気塊を断熱的に別の空気塊と同じ高度まで持ってきて、同圧にして、密度あるいはその時の温度で比較する。

→ すべての空気塊を規準気圧まで持ってきてその高度における密度(あるいは温度の逆数)で比較する。

→ **温位**が適している。空気塊が異なる高度であっても密度とも簡単に結びつき浮力を相互比較できる便利な量。

鉛直方向の運動方程式
$$\frac{\partial w}{\partial t} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

静力学平衡の（空気塊が鉛直方向に運動をしない）状態

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$$

気圧が周囲のもの $\bar{p}$ と変わらないものと仮定し、
 空気塊が平衡状態から僅かに断熱的に上方に移動したときの
 鉛直方向の運動方程式は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{d^2 z}{dt^2} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} (-g\bar{\rho}) = g \frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho} = g \frac{\bar{\theta} - \theta}{\theta}$$

ここで、
$$\theta(z) \approx \bar{\theta} + \left(\frac{d\bar{\theta}}{dz}\right)z$$

(温位減率で成層状態を決める)

よって、

$$\frac{d^2z}{dt^2} = - \frac{g}{\bar{\theta}} \left(\frac{d\bar{\theta}}{dz}\right)z \equiv - N^2 z, \quad N : \text{Brunt-Vaisala振動数}$$

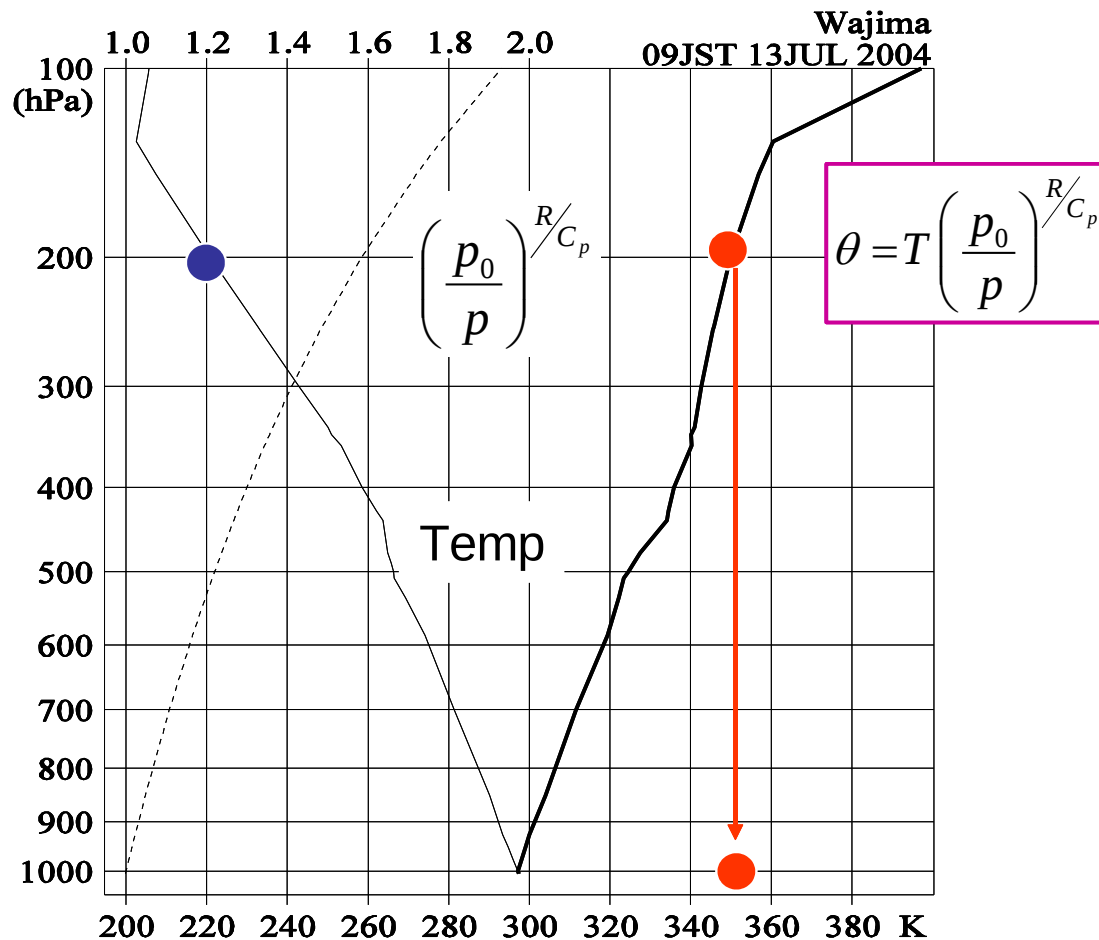
$$N^2 \equiv \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz}$$

ブラントーバイサラ振動数
時間の逆数の二乗

空気塊の鉛直の位置の解は振動を表す

第8回資料

温度と温位の鉛直分布



2004年7月13日9時の石川県・輪島での高層観測による温度(細い実線)、**温位**(太い実線)の鉛直分布。破線は**温位**の気圧に関するファクターであり、そのスケールは上部に
いれてある。(豪雨・豪雪の気象学より)

Brunt-Vaisala振動数の意味 (1)

浮力により自分で上下方向に振動する振動数
--- 標準的な大気で

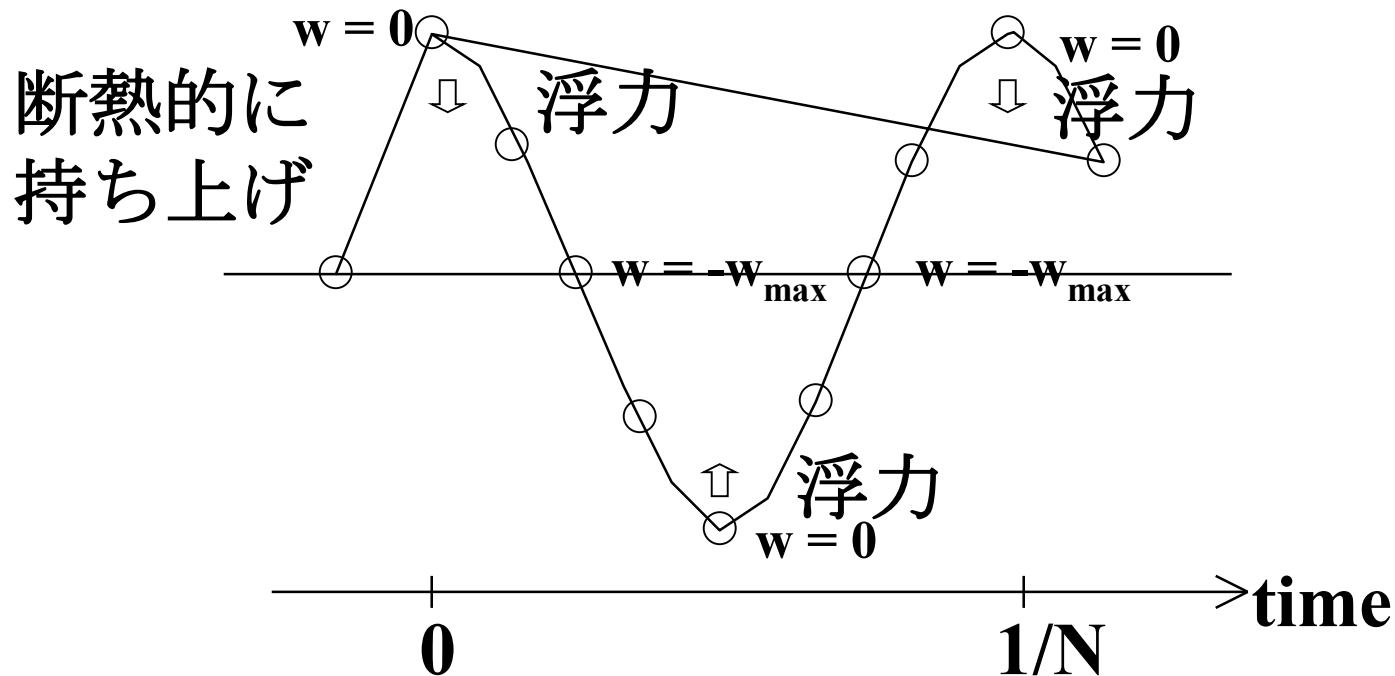
$$N \approx \sqrt{\frac{10}{300} \frac{3.0}{1000}} = \frac{1}{100} \text{ (/s)}$$

$N^2 < 0$: 絶対不安定大気

$N^2 = 0$: 中立 (等温位) 大気

$N^2 > 0$: 安定大気

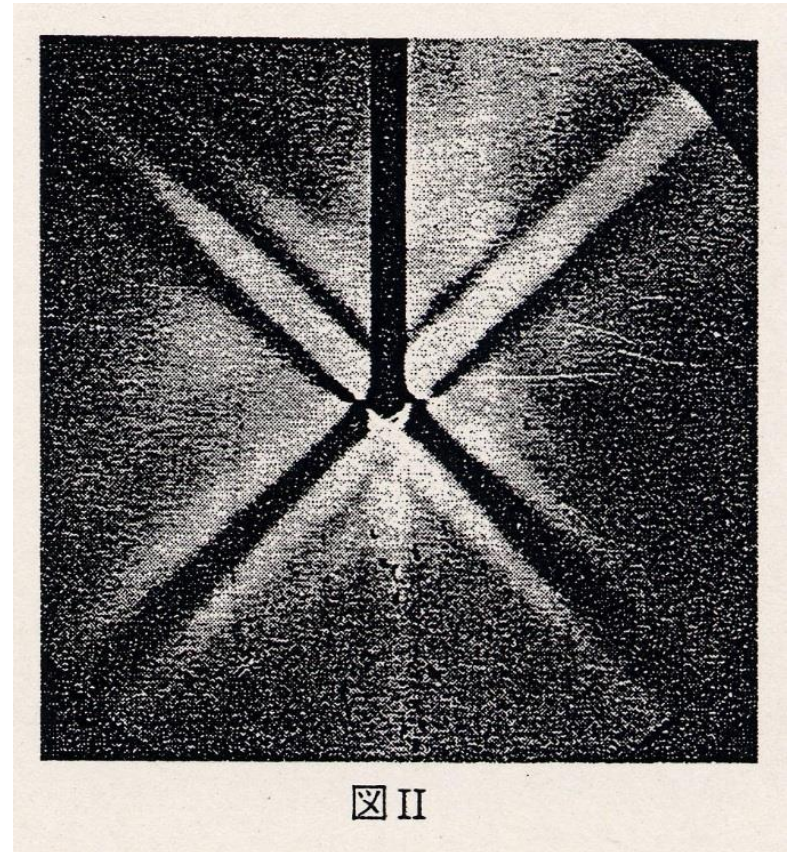
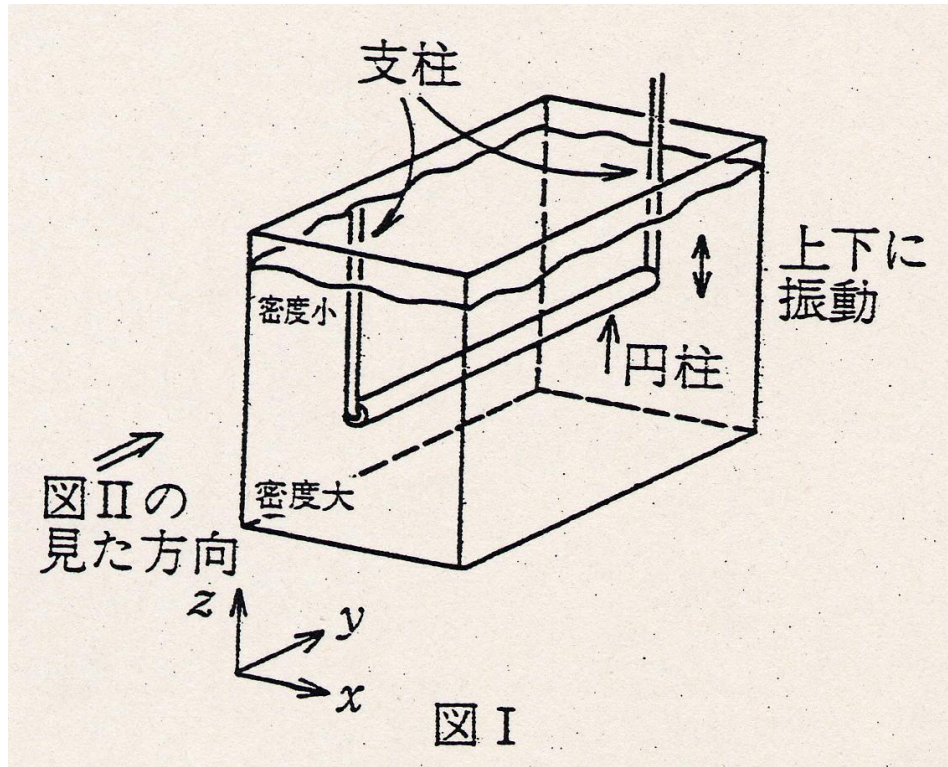
Brunt-Vaisala振動数の意味 (2)



- ・ 等温位大気 ($N = 0$) : 気塊を持ち上げても浮力を得ないので振動しない
- ・ 安定度 ($\partial\theta/\partial z$) が高い程、浮力が大きくなり振動数 (N) が大きくなる

内部重力波

1方向に復元力がある場合



内部重力波の実験ビデオ



周波数: 8



周波数: 6

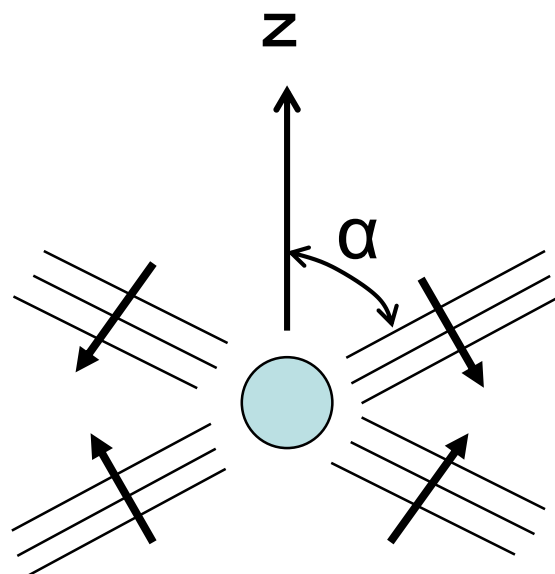


周波数: 4



周波数: 3

①



波面の進む方向

②

$$\begin{array}{ll} \frac{\omega}{N} \rightarrow 0 & \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \frac{\omega}{N} \rightarrow 1 & \alpha \rightarrow 0 \end{array}$$

振動の周期を小さく(大きく)すると角度 α は大きく(小さく)なる

$$\omega = N \cos \alpha$$

どうしてこうなる？

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} N^2 = 0$$

$$w' = A \exp[i(kx + nz - \omega t)]$$

$$\omega^2 = \frac{k^2 N^2}{n^2 + k^2}$$

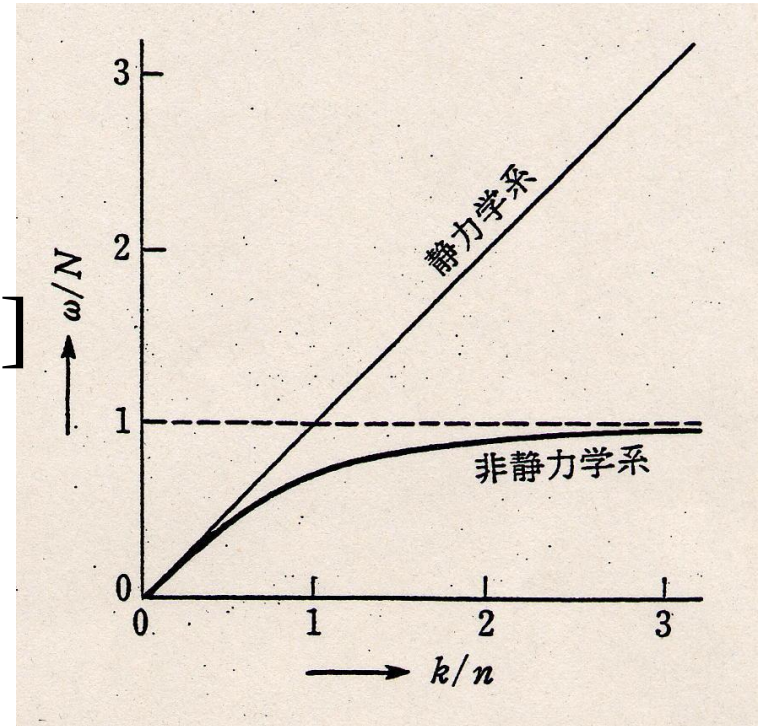


図 非静力学系（実曲線）と静力学系（実直線）における無次元の波数（ k/n ）と振動数（ ω/N ）の関係の比較

Nが与えられた時の（ k, n, ω ）の関係 $\Rightarrow$ 分散関係

$$\omega = \pm \frac{k N}{\sqrt{n^2 + k^2}}$$

$$\Rightarrow \omega = \pm N \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^2}}.$$

振幅の伝搬に関する群速度と位相速度の関係

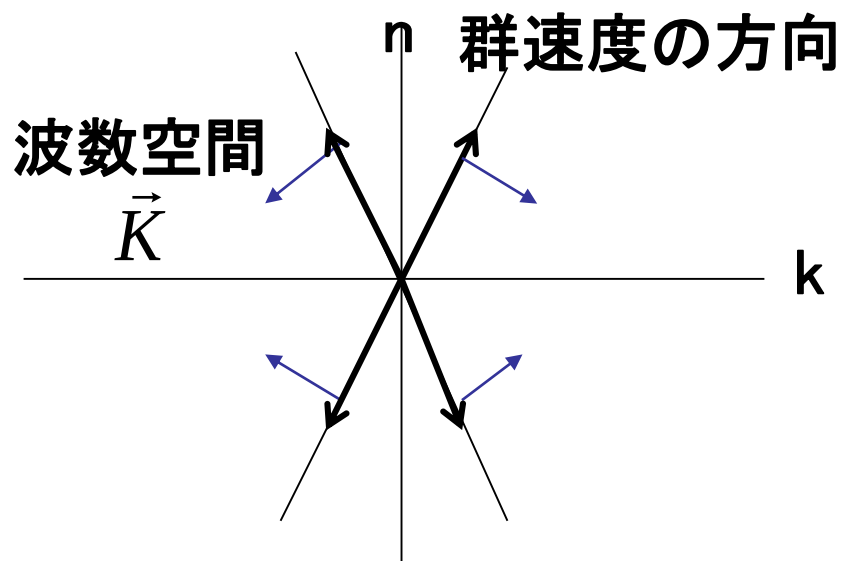
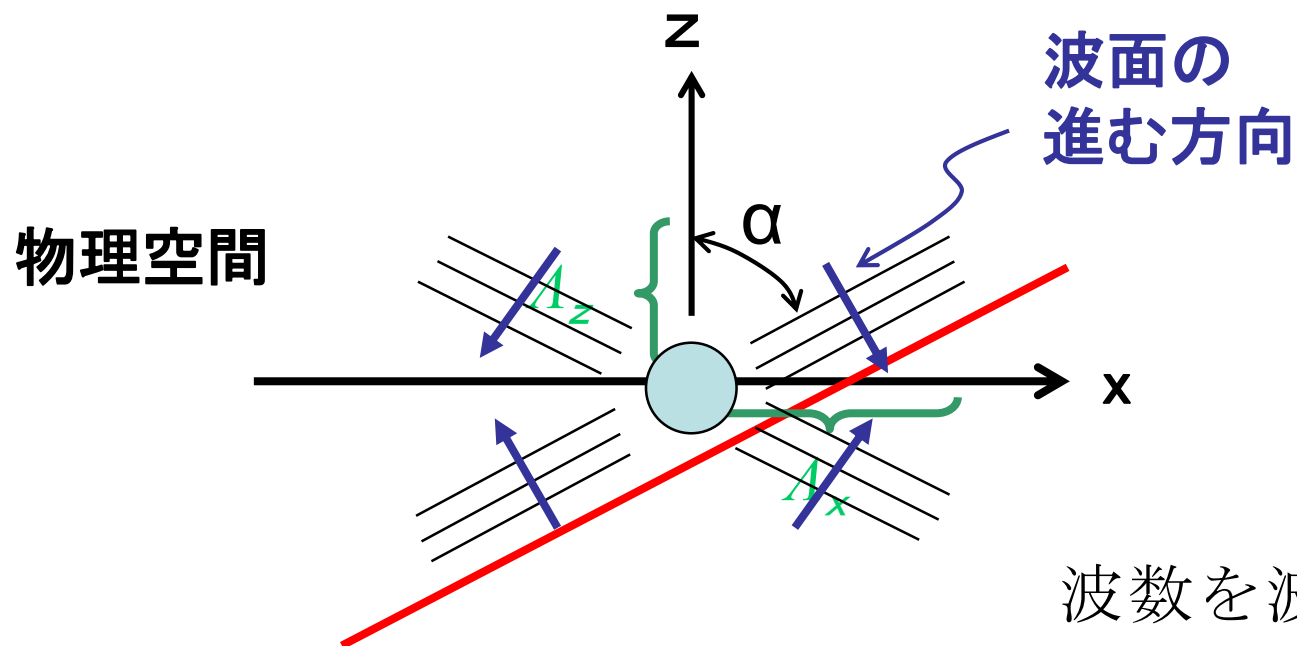
$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{n^2 N}{(n^2 + k^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{-n k N}{(n^2 + k^2)^{3/2}}$$



$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{c}_g &= k \frac{\partial \omega}{\partial k} + n \frac{\partial \omega}{\partial n} \\ &= \frac{k n^2 N}{(n^2 + k^2)^{3/2}} + \frac{-n^2 k N}{(n^2 + k^2)^{3/2}} = 0 \end{aligned}$$

ベクトルの k と c_g は直交する！

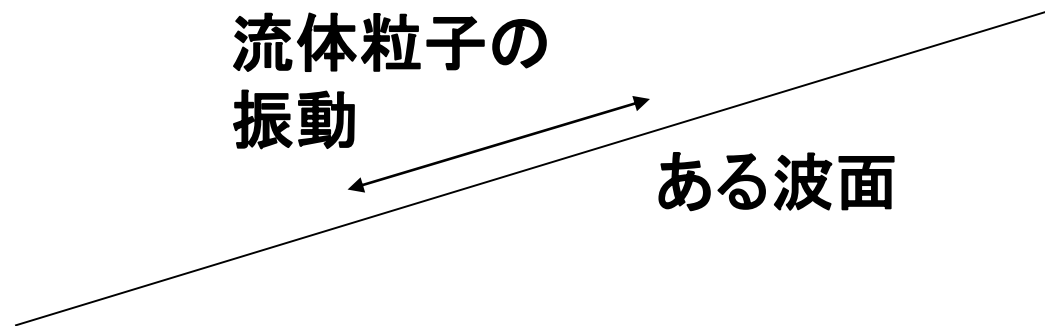


波数を波長に直すと

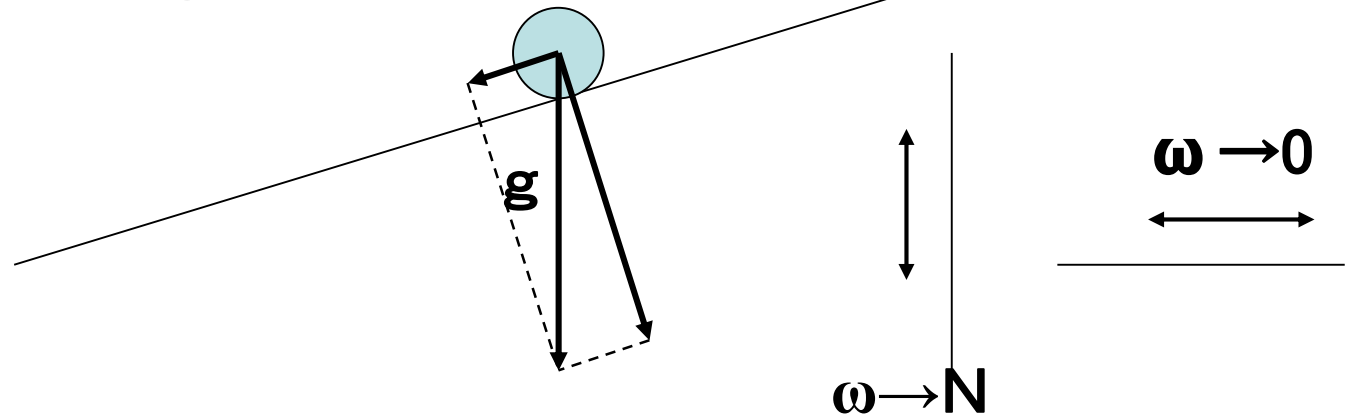
$$\begin{aligned} \frac{\omega}{N} &= \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^2}} \\ &= \frac{2\pi / \lambda_x}{\sqrt{(2\pi / \lambda_z)^2 + (2\pi / \lambda_x)^2}} \\ &= \frac{\lambda_z}{\sqrt{\lambda_z^2 + \lambda_x^2}} = \cos \alpha \end{aligned}$$

物理的解釈

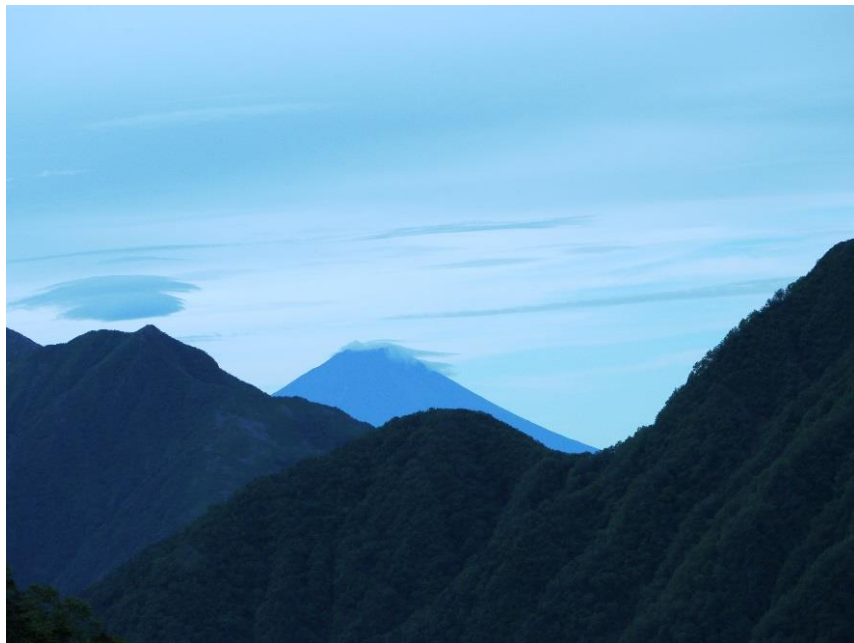
内部重力波:



斜面における質点の運動:
斜面方向に $g \cos \alpha$ の力が働く



山岳波



山岳波9a



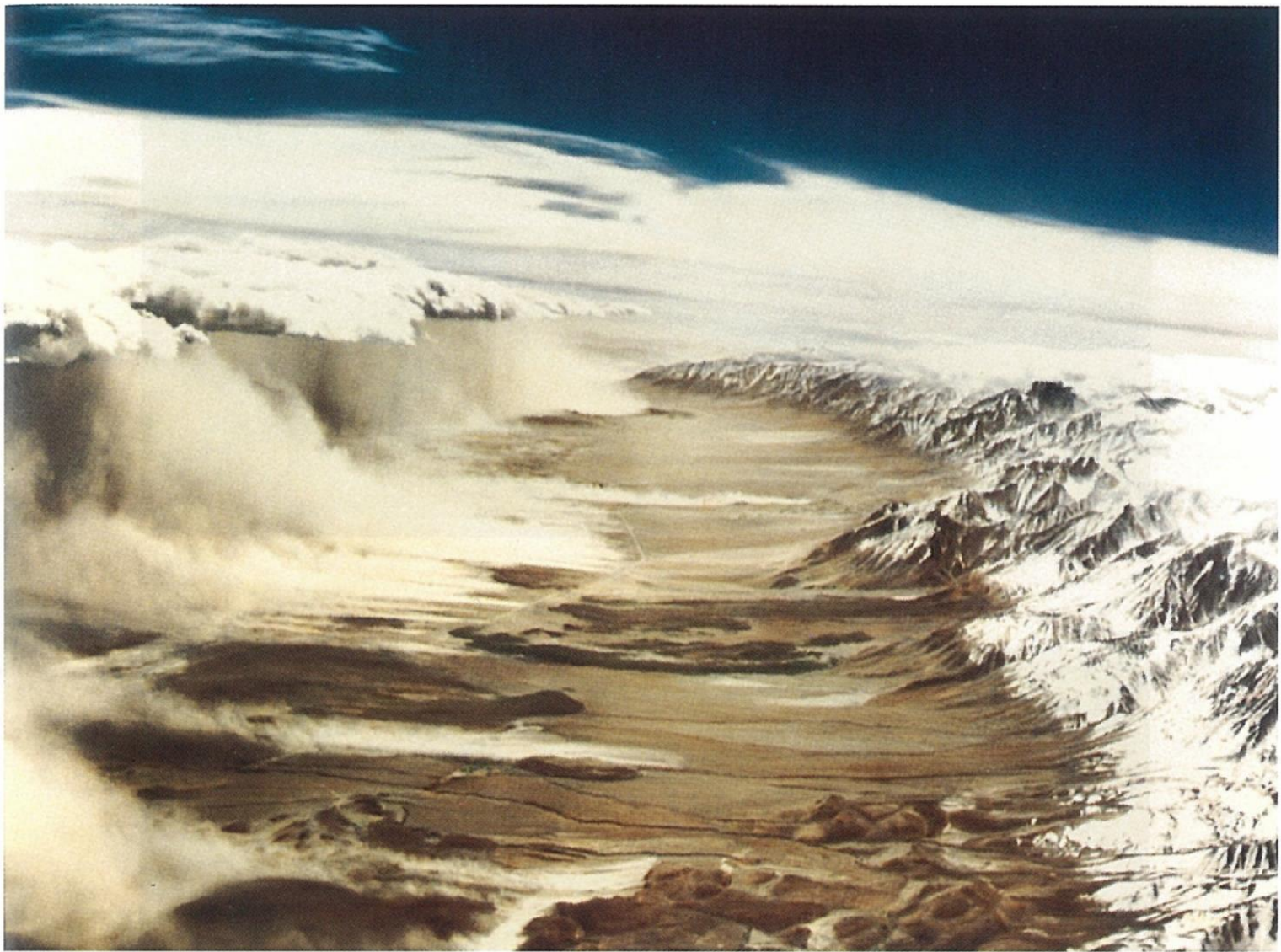


Plate 1. The Sierra Wave in the lee of the Sierra Nevada (and Mt Whitney) looking at the dust being blown off the Owens Valley into the first lee wave and rotor, which are stationary in front of the Inyo Mountains. This picture was taken by Robert Symons, who had soared in a fighter plane with feathered propellers in the lee wave upcurrent. The colours in this picture were added by an artist to match the tones of a photograph of the same area by Harold Klieforth.