○ 1次元の減衰運動の中の強制振動

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$\omega^2 = \omega_0{}^2 - \gamma^2$とおくと、一般解は

$$x = c\,e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta) + \frac{1}{\omega} e^{-\gamma t} \int^t f(t') e^{-\gamma t'} \sin \omega (t - t')\, dt'$$

○ 外力$f(t) = f_0 \sin \Omega t$の場合

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \Omega t$$

この一般解は

$$x = c\,e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta) + f_0 \frac{\left(\omega_0{}^2 - \Omega_0{}^2\right)\sin \Omega t - 2\gamma\Omega \cos \Omega t}{\left(\omega_0{}^2 - \Omega_0{}^2\right)^2 + (2\gamma\Omega)^2}$$

$$= c\,e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta) + \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \Omega_0{}^2\right)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \sin(\Omega t + \varphi)$$

φ は外力と変位との間の位相差で

$$\tan\varphi = \frac{-2\gamma\Omega}{\omega_0{}^2 - \Omega_0{}^2}$$

時間が経つと、第1項は無視できる。この場合の振幅をDとすると

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{f}_0}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \Omega_0{}^2\right)^2 + \left(2\gamma\Omega\right)^2}}$$

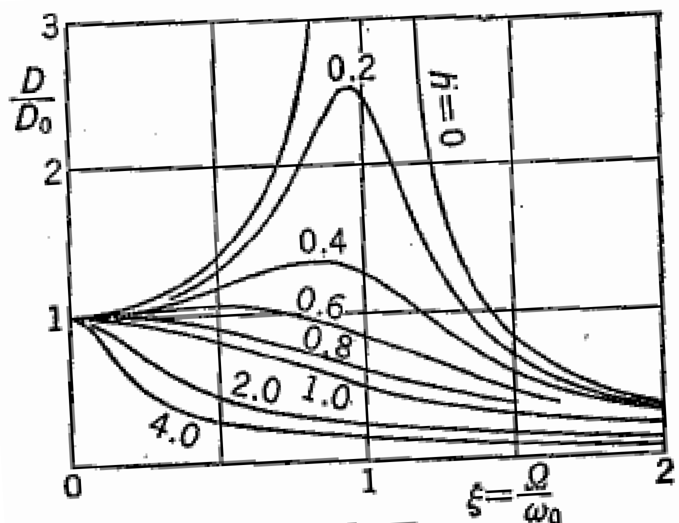
これに対して一定の外力（Ω=0）の場合の変位を$\mathbf{D_0}$とすると、

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\xi^2\right)^2 + 4\mathbf{h}^2\xi^2}}$$

ただし

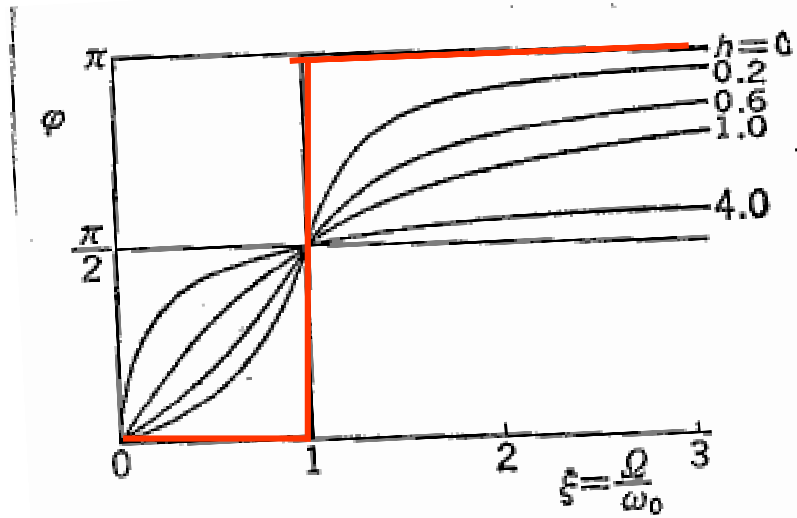
$$\mathbf{h} = \frac{\gamma}{\omega_o}, \quad \xi = \frac{\Omega}{\omega_o}$$

外力の振動数に対する振幅



1・8 図

外力の振動数に対する位相のずれ



1・9 図

・h=0,ξ ＝1（粘性がなく振動数が同じ）場合、共鳴が起こり、時間と共に発達する。

・位相に関して、外力の振動数が小さい時は、変位はそれについてゆく。しかし、Ω が大きくなると、外力の変位とは逆（φ =π ）になる。この境界はΩ ＝ω である。

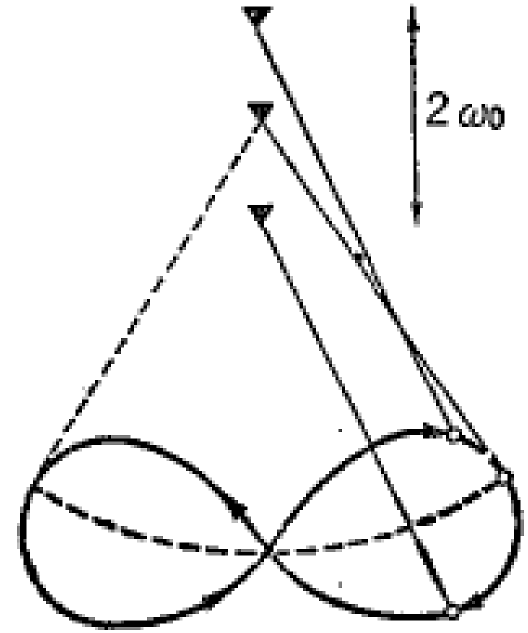
・時間がたった時の変位は $x = D\sin(\Omega t + \varphi)$

・速度は $\dot{x} = \Omega D\cos(\Omega t + \varphi)$ で変位に対してπ /2だけ位相が進む

○　パラメータ励振

振り子の振動数ω_0の2倍で支点を上下させる

$$m\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(\omega_0^2-\alpha\sin 2\omega_0 t\right)\theta=0$$

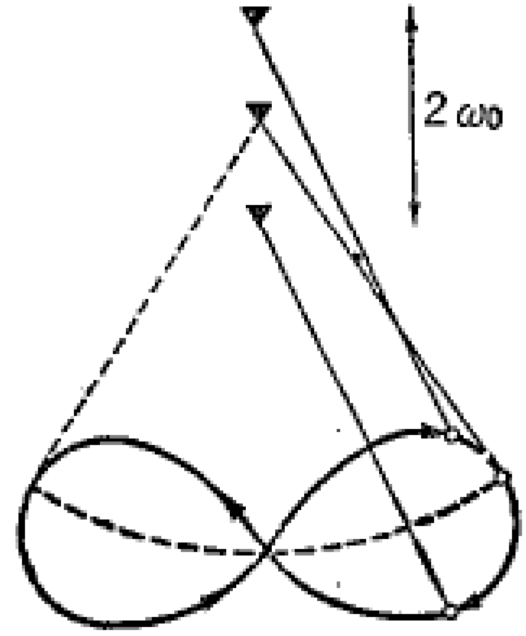


・ブランコをこぐときには、ブランコの周期の半分の周期で腰を上下させる。こうして支点から重心までの距離を周期的に変えると、ブランコの振幅を大きくすることができる。

・単振り子の糸を周期的に長くしたり短くしたりすると、単振り子の振幅が大きくなる。

○ パラメータ励振するのは

$$m\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\theta=\alpha\sin 2\omega_0 t\cdot\theta$$



・時間dtの間に加えられる仕事
（角θを変位をみたときの仕事）は

$$dW=\alpha\cdot\sin 2\omega_0 t\cdot\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}dt=\frac{\alpha\omega_0}{2}\theta_0{}^2\sin^2 2\omega_0 t\cdot dt\geq 0$$

と、常に正であり、振り子はたえずエネルギーを増し、ふれは次第に大きくなる。

例：ブランコ

[身近な振動と共鳴の数々・ブランコ](www.osaka-kyoiku.ac.jp/~masako/exp/melde/buranko.html)

www.osaka-kyoiku.ac.jp/~masako/exp/melde/buranko.html

今までは時間変動だけの振動であった

1次元進行波　ー時間 t と距離 xー　の記述の仕方を眺める

● 1次元波動の記述の仕方

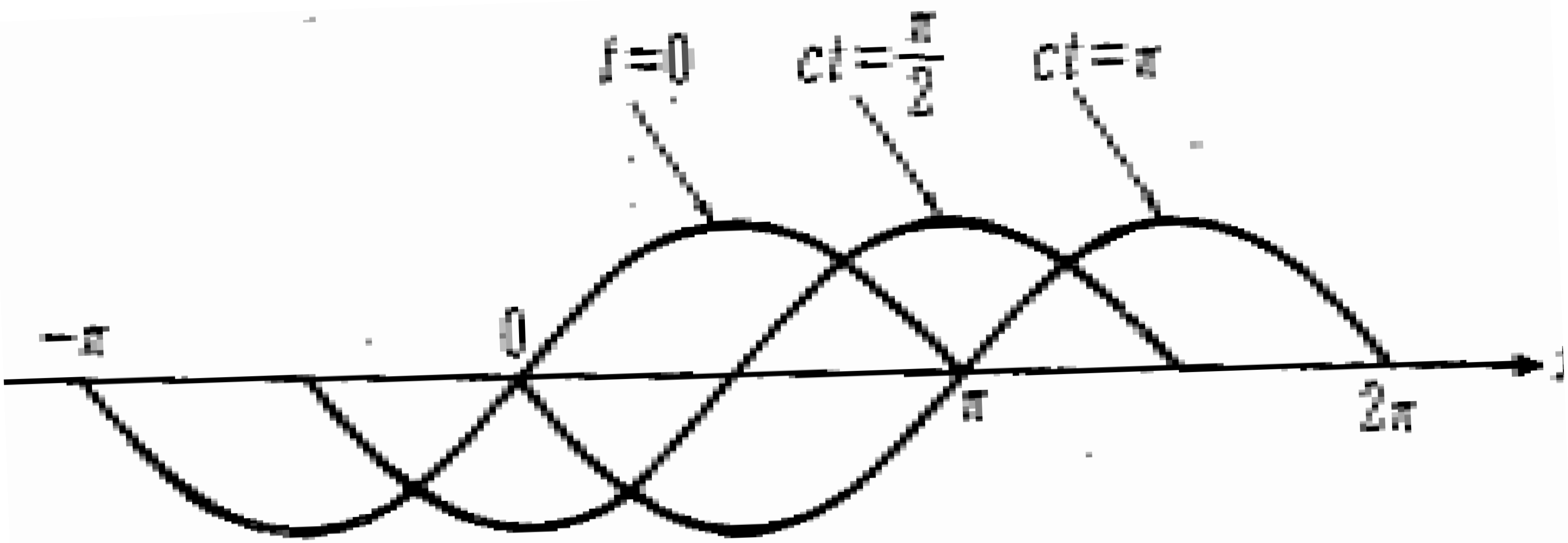
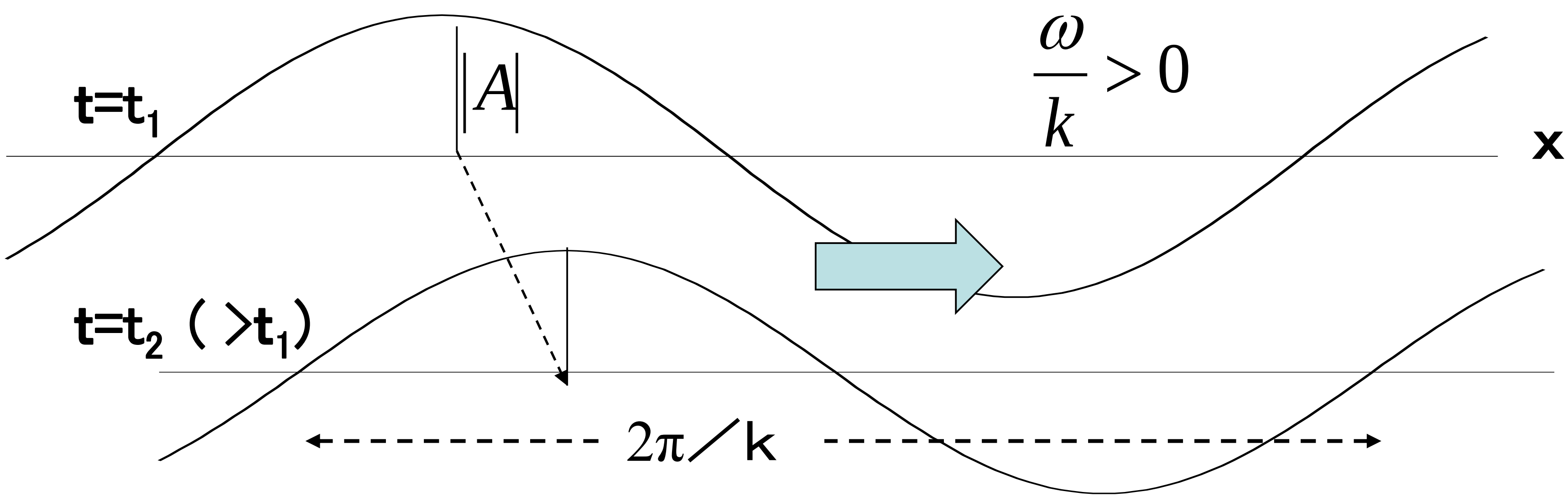


図2.3　x の正の方向に位相速度 c で伝播している三角関数型の波.

○一つの単色波の伝搬

η＝Re(A exp {i (k x-ωt)})



$$\eta = |A| \cos(k\,x - \omega t + \delta)$$

$$where |A|^2 = A_r^2 + A_i^2,\ \tan\delta = \frac{A_i}{A_r}$$

○二つの単色波の重ね合わせ

$$\eta = \sin\left\{\left(k_0 + \frac{1}{2}\Delta k\right)x - \left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right\}$$

$$+ \sin\left\{\left(k_0 - \frac{1}{2}\Delta k\right)x - \left(\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right\}$$

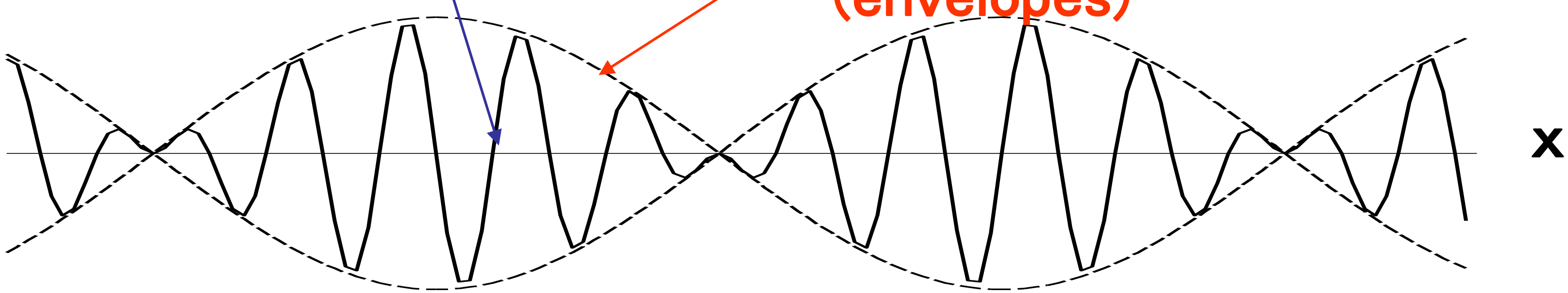
$$= \underline{2\sin(k_0\, x - \omega_0\, t)}\,\underline{\cos(\Delta k\, x - \Delta\omega t)}$$

$k_0 >> \Delta k$

$\omega_0 >> \Delta\omega$

搬送波
（carrier waves）

包絡線　→　振幅を表しエネルギーに関係する
（envelopes）



仮定

$$k_0 >> \Delta k$$

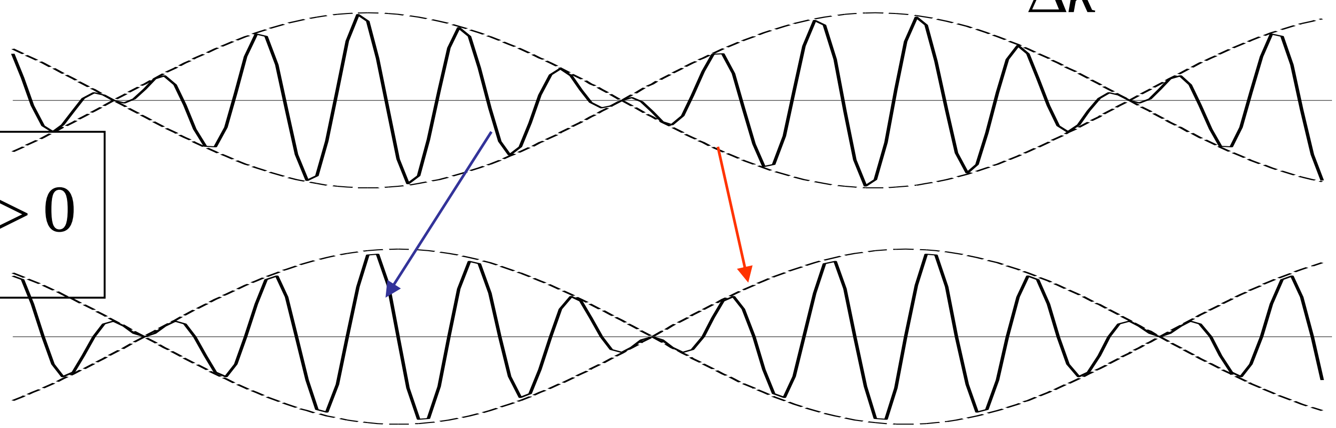
$$\omega_0 >> \Delta\omega$$

○二つの速度が定義される：$\dfrac{\omega_0}{k_0}$ ：位相速度

$\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$ ：群速度

t=t_1

$$\boxed{\frac{\omega_0}{k_0} < 0, \frac{\Delta\omega}{\Delta k} > 0}$$



t=t_2

○ 複数の波動の重ね合わせ：ω＝f(k)： 分散関係

$$\frac{\omega}{k} = \begin{cases} \text{kに依存しない……非分散} \\ \text{kに依存する………分散性がある} \end{cases}$$

$$\boxed{c_{gx} = \frac{d\,\omega}{d\,k}:}$$ 群速度（エネルギーの速度）$\neq \boxed{\dfrac{\omega}{k} \equiv c_x}$ ：位相速度

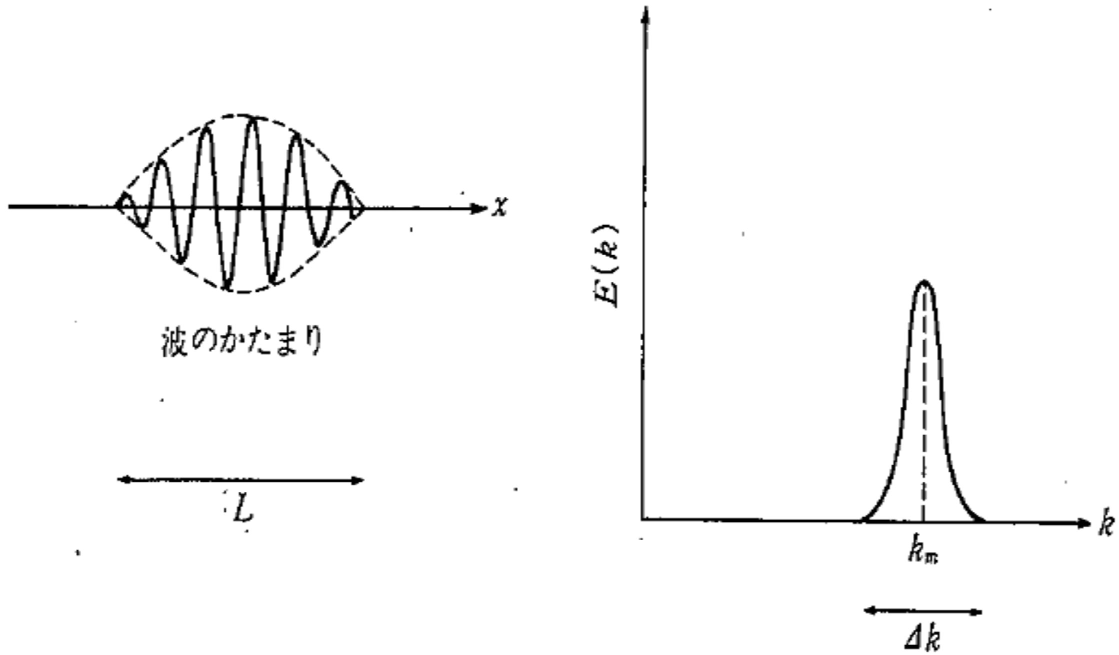
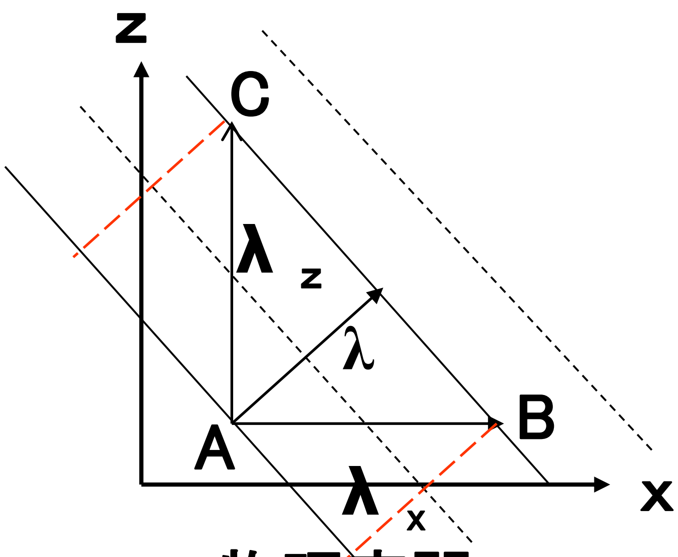


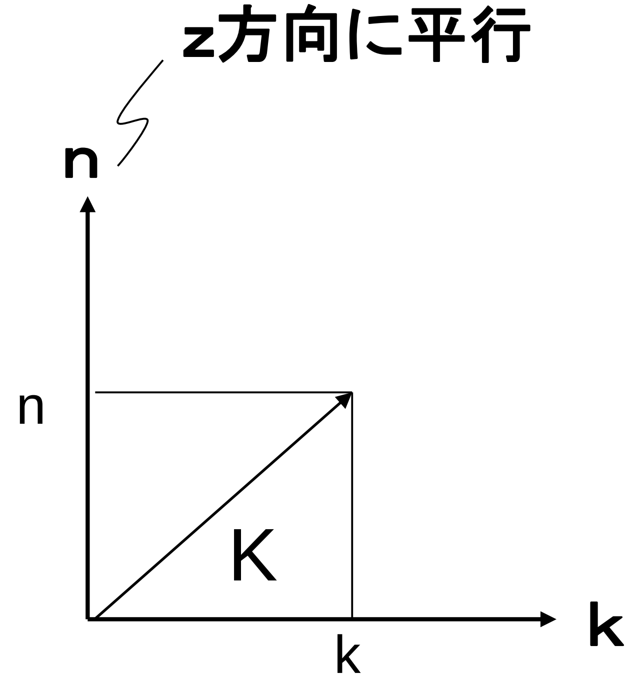
図 2.7 運動エネルギーのスペクトラム密度分布 $E(k)$ がある波数 k_m に集中している(右図)ような波のかたまり(左図).

空間的に孤立した波にかたまりについても
波数空間では局在したところに集中して存在する

●2次元波動



物理空間



波数空間

三角形ABCの面積S

$$(2S)^2 = \lambda_x^2 \lambda_z^2 = \lambda^2\left(\lambda_x^2 + \lambda_z^2\right)$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_z}\right)^2$$

$$\vec{K} = (k, n) \equiv \left(\frac{2\pi}{\lambda_x}, \frac{2\pi}{\lambda_z}\right)$$

$$\Rightarrow \quad K^2 = k^2 + n^2$$

波数空間で考える方がベクトルとしてわかりやすい！

地球の自転が小さい場合の方程式系

●大気の状態を記述する方程式系（ただし地球回転と大気粘性は無視）

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{k}$$ （A1）　（運動方程式）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$ （A2）　（連続の式）

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{C_p T}\frac{dQ}{dt} \Rightarrow 0$$ （A3）　（熱力学第一法則の式）

$$\theta = \frac{p}{\rho R}\left(\frac{p_{00}}{p}\right)^{\kappa} = T\left(\frac{p_{00}}{p}\right)^{\kappa}$$ （A4）　（温位の定義式）

二次元の場合、u, w, p, ρ, θ の5変数に対して5つの式がある
$\Rightarrow$ 完全系

$\mathbf{v} = (u, w)$：風の二成分，　p：気圧，　ρ：密度，　θ：温位，

g：重力加速度，　$\mathbf{k}$：鉛直方向の単位ベクトル，　C_p：定圧比熱，

R：乾燥空気の気体定数　p_{00}：代表的な気圧(例えば1000hPa),

$\kappa \equiv R/C_p$，　$\Pi \equiv (p/p_{00})^{\kappa}$：エクスナー関数（無次元の圧力）

浮力

●同高度で二つの異なる空気塊がある場合、どちらが重いかどうかは、空気塊の重さ、つまり、その密度ρ で判断する。軽い密度(高温)の　空気塊の方が重い（低温）空気塊より上向きの力を得る（その力を「浮力」という）。

気体の状態方程式より　p ∝ρ T　→　ρ ∝ 1/T　（pが同圧の場合）

●異なる高度にある空気塊間の浮力は？
→　空気塊を断熱的に別の空気塊と同じ高度まで持ってきて、同圧にして、密度あるいはその時の温度で比較する.

→　すべての空気塊を規準気圧まで持ってきてその高度における密度（あるいは温度の逆数）で比較する.

→　温位が適している。空気塊が異なる高度であっても密度とも簡単に結びつき浮力を相互比較できる便利な量。

静的安定度(1)

鉛直方向の運動方程式

$$\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$$

静力学平衡の（空気塊が鉛直方向に運動をしない）状態

$$0 = -g - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$$

気圧が周囲のもの $\bar{p}$ と変わらないものと仮定し、
空気塊が平衡状態から僅かに断熱的に上方に移動したときの
鉛直方向の運動方程式は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho}(-g\bar{\rho}) = g\,\frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho} = g\,\frac{\theta - \bar{\theta}}{\bar{\theta}}$$

静的安定度(2)

ここで、 $\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{Cp}}$ （温位と気温の関係式）、

$p = \rho RT$ （状態方程式）、

$\theta(z) \approx \overline{\theta} + (\frac{d\overline{\theta}}{dz})z$ （温位減率で成層状態を決める）

よって、

$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{g}{\overline{\theta}}(\frac{d\overline{\theta}}{dz})z \equiv -N^2z,\ \ N$: Brunt-Vaisala振動数

$$N^2 \equiv \frac{g}{\overline{\theta}}\frac{d\overline{\theta}}{dz}$$

ブラント–バイサラ振動数
時間の逆数の二乗

Brunt-Vaisala振動数の意味 (1)

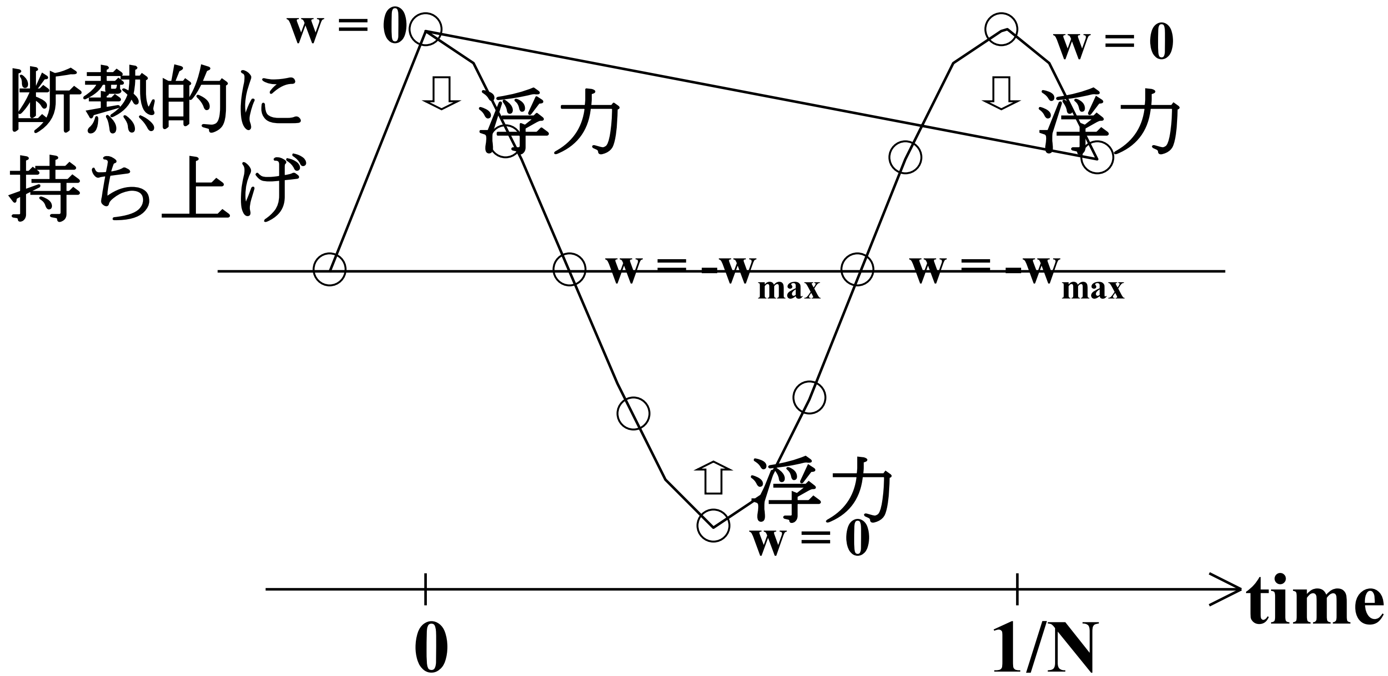
浮力により自分で上下方向に振動する振動数

--- 標準的な大気で

$$N \approx \sqrt{\frac{10}{300}\frac{3.0}{1000}} = \frac{1}{100}\ (/\mathrm{s})$$

$N^2 < 0$: 絶対不安定大気
$N^2 = 0$: 中立（等温位）大気
$N^2 > 0$: 安定大気

Brunt-Vaisala振動数の意味 (2)



・等温位大気（N = 0）：気塊を持ち上げても浮力を得ないので振動しない

・安定度（∂θ/∂z）が高い程、浮力が大きくなり振動数（N）が大きくなる

内部重力波 —— 1方向に復元力がある場合

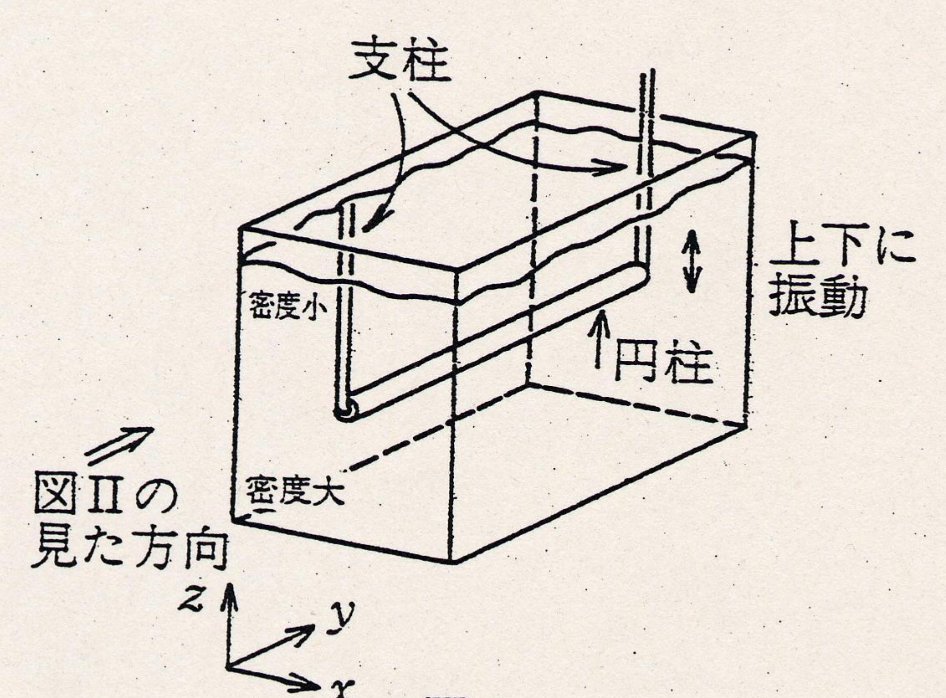


図 I

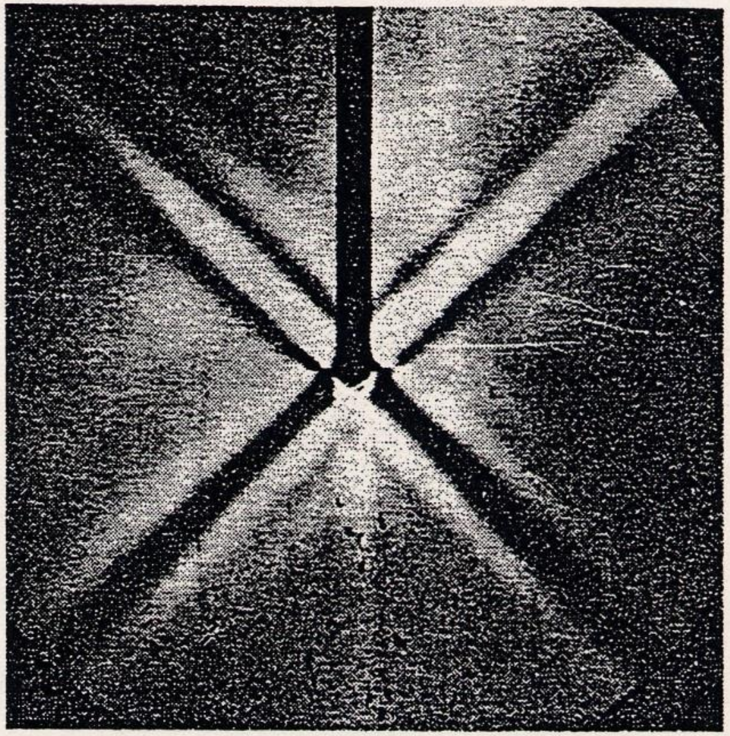
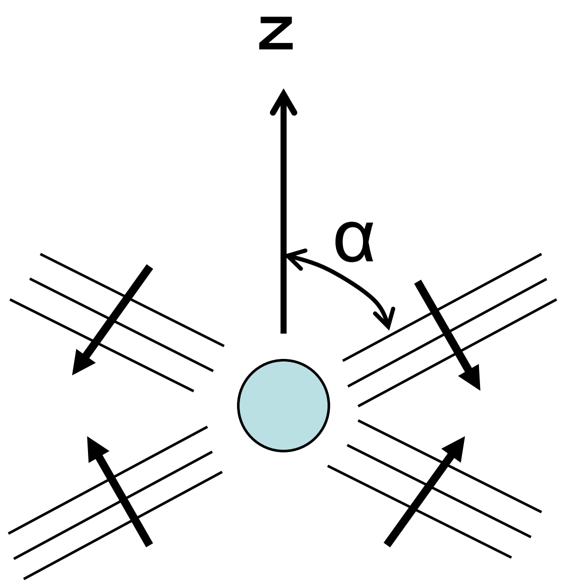


図 II

①



波面の進む方向

②

$$\frac{\omega}{N} \rightarrow 0 \qquad \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

どうしてこうなる？

$$\frac{\omega}{N} \rightarrow 1 \qquad \alpha \rightarrow 0$$

$$\boxed{\omega = N\cos\alpha}$$

$$u = u' \quad w = w'$$

$$\theta = \overline{\theta}(z) + \theta' \quad \Pi = \overline{\Pi}(z) + \Pi' \quad \rho = \overline{\rho}(z) + \rho'$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} \qquad (\phi' = C_p \Theta \Pi') \qquad (1)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\partial \phi'}{\partial z} + b' \qquad (2) \qquad (b' = g\,\theta'/\Theta)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial b'}{\partial t} + w' N^2 = 0 \qquad (4)$$

$$N^2 = \frac{g}{\overline{\theta}} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}$$

大気の安定度:
- 地球大気は正値を持つ。
- 安定成層をする

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}N^2=0$$

$$w' = A\exp[i(kx+nz-\omega t)]$$

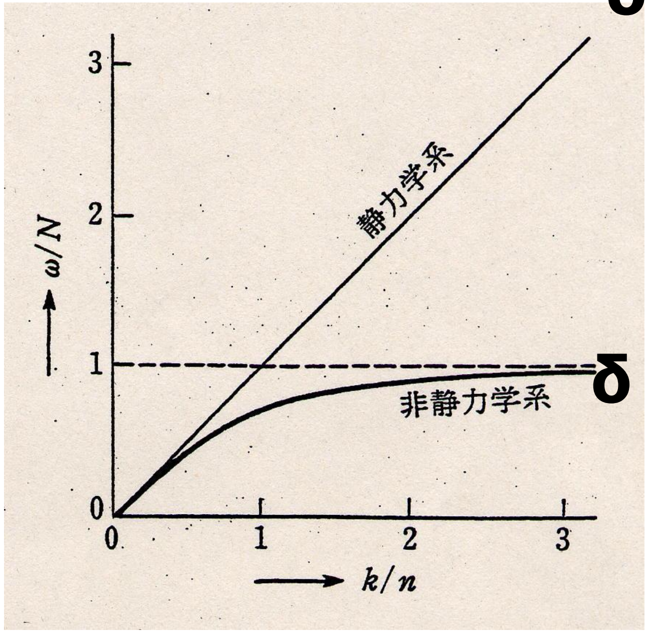
$$\phi' = -\frac{n\omega}{k^2}A\exp[i(kx+nz-\omega t)]$$

$$b' = -\frac{N^2 i}{\omega}A\exp[i(kx+nz-\omega t)]$$

$$u' = -\frac{n}{k}A\exp[i(kx+nz-\omega t)]$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k^2N^2}{n^2+k^2}}$$

δ =0



δ =1

図　非静力学系（実曲線）と静力学系（実直線）における無次元の波数（k/n）と振動数（ω/N）の関係の比較

Nが与えられた時の（k,n,ω）の関係　⇒　分散関係

$$\omega = \pm \frac{k\,N}{\sqrt{n^2 + k^2}}.$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{n^2 N}{\left(n^2 + k^2\right)^{3/2}},$$

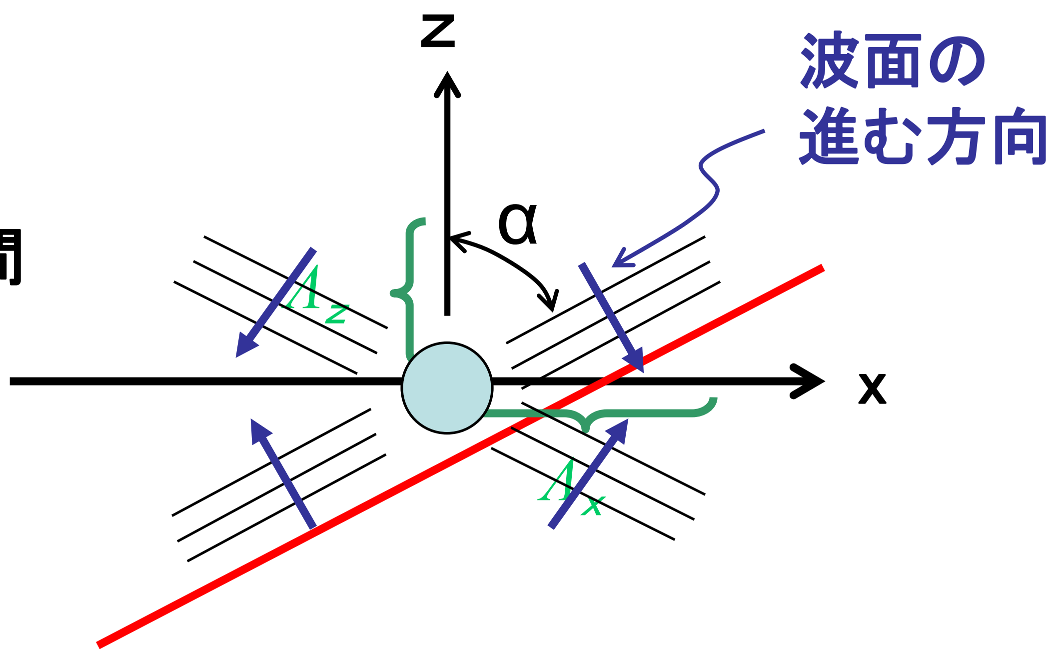
$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{-n\,k\,N}{\left(n^2 + k^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{k} \bullet \vec{c}_g = k\frac{\partial \omega}{\partial k} + n\frac{\partial \omega}{\partial n}$$

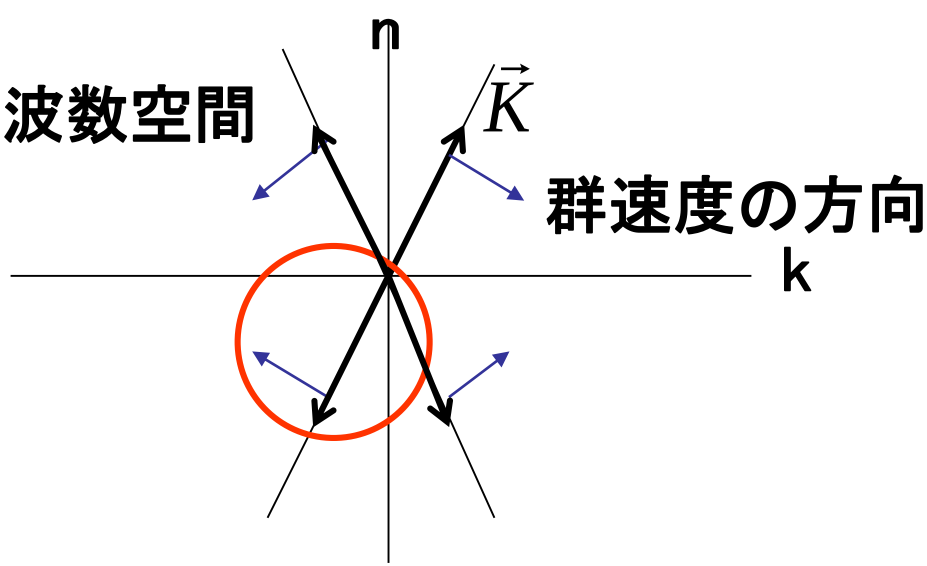
$$= \frac{k\,n^2 N}{\left(n^2 + k^2\right)^{3/2}} + \frac{-n^2\,k\,N}{\left(n^2 + k^2\right)^{3/2}} = 0$$

ベクトルのk と c_g は直交する！

物理空間



波数空間



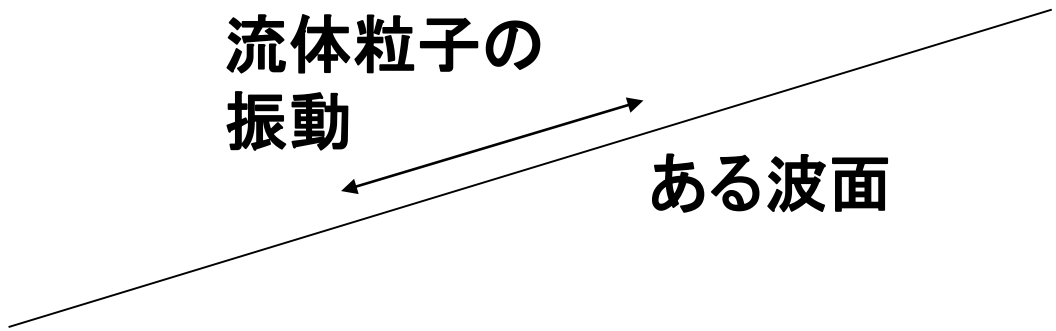
波数を波長に直すと

$$\frac{\omega}{N}=\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}=\frac{2\pi/\lambda_x}{\sqrt{(2\pi/\lambda_z)^2+(2\pi/\lambda_x)^2}}$$

$$=\frac{\lambda_z}{\sqrt{\lambda_z{}^2+\lambda_x{}^2}}=\cos\alpha$$

物理的解釈

内部重力波:



斜面における質点の運動:

斜面方向に$g \cos\alpha$の力が働く