

# Jumping bean はじける豆粒

## クラドニ図形

約250年ほど前、クラドニ  
(Chladni)という物理学者が、  
『音を可視化する』方法を  
開発した。

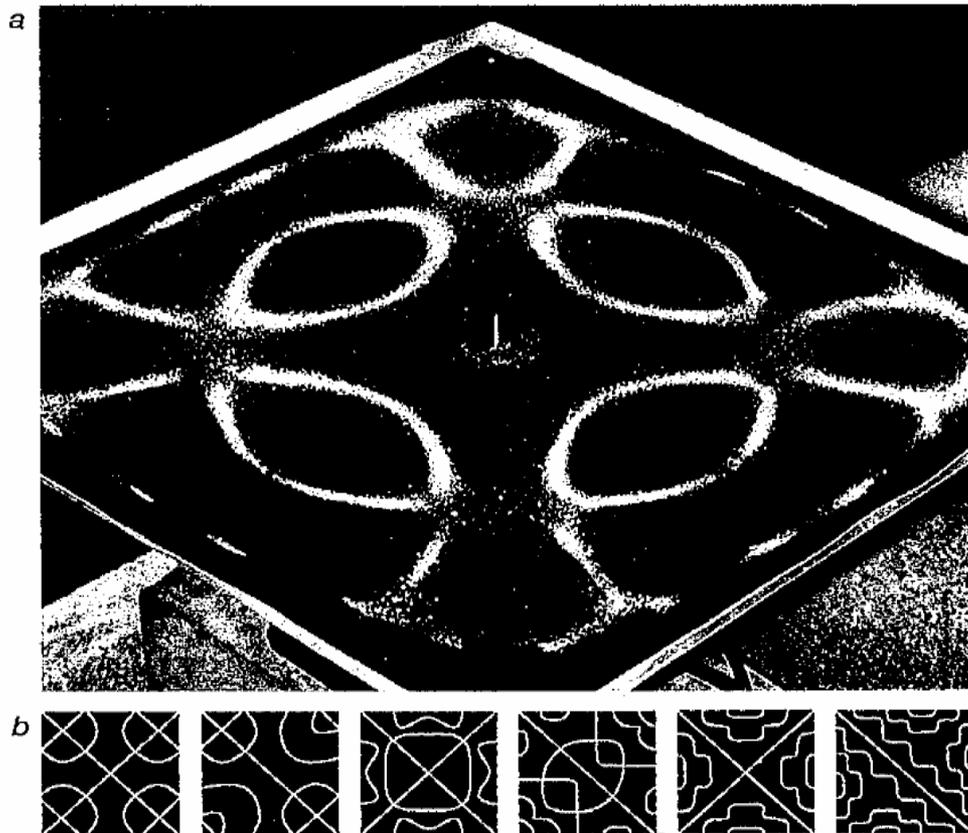


図 4.24 金属板の表面にばらまかれた細かい粉は、板がバイオリンの弓で振動させられるとクラドニ図形を形成する (a)。図形はじつにさまざまな形をとる。ここに示したのは、そのごく一部である (b)。(Photo a: Biological Physics Department, University of Mons, Belgium.)

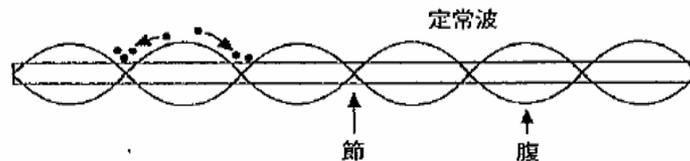
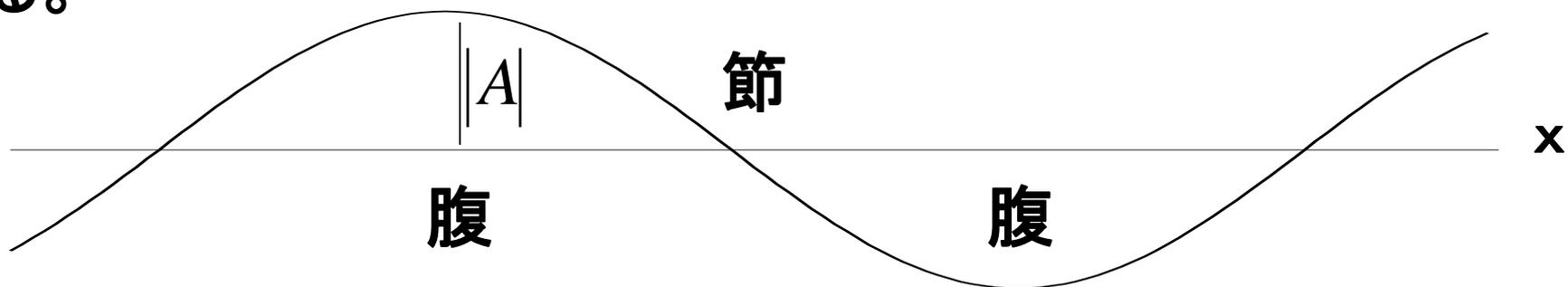
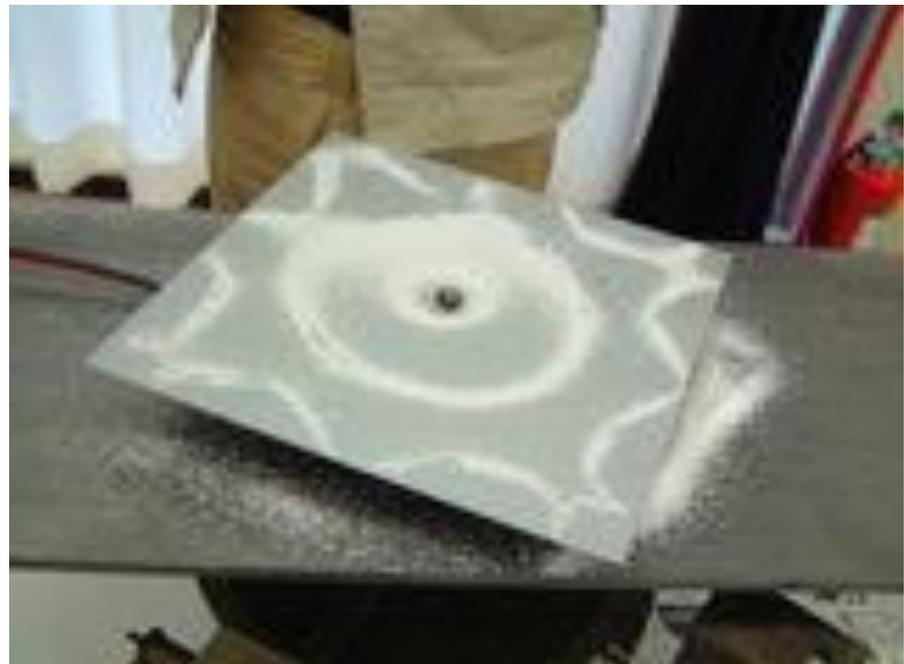


図 4.25 節に向かう粒子の運動によって生じるパターン。節とは、板の振動が上にも下にも変位を生じさせないところ。一部の粒子は節に向かわずに腹に向かうこともある。腹とは、変位が最大になる領域である。

## クラドニ図形

音を出して板を振動させると、板全体は一様に上下運動をするわけではなく、波をうつように運動する。大きく振動する部分(腹)では撒いたお塩がはじき飛ばされ、ほとんど振動しない部分(節)周辺にそれが集まってくる。その結果、幾何学模様ができる。この腹と節の部分は、音の周波数(高さ)と板の大きさや硬さ等によって現れる場所が異なってくる。周波数を変えると模様が変化するのはこのためである。





[神が音に託した「指紋」クラドニ図形 ∞ Resonance Square ...](#)

[\*www.youtube.com/watch?v=V5acI4XPGNM\*](http://www.youtube.com/watch?v=V5acI4XPGNM)

動画

[共振・共鳴](#)

[\*www4.osk.3web.ne.jp/~moroko/physics\(wave\)/resonance/...\*](http://www4.osk.3web.ne.jp/~moroko/physics(wave)/resonance/...)

# ○ 大気の運動： 中立波動

\* 1次元

- 単振動
- 強制振動
- 減衰振動
- パラメータ励振 (ブランコ)

# ○ 1次元単振動

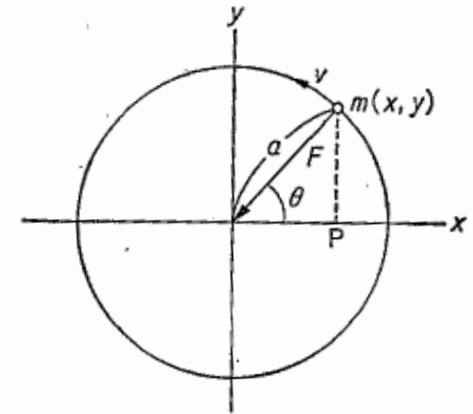
振り子、あるいはばねのついた質点

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- ・この場合、 $\omega^2 > 0$  定数。  
m は質点、x は変位、t は時間。
- ・” $-kx$ ”は原点に向かう力(復元力)
- ・この方程式は調和振動あるいは単振動  
一般解は

$$A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

AとBは未定。条件を二つ入れると確定する。



1.1 図

## ○ 1次元の強制振動

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \omega_0^2 x = f(t)$$

一般解は  $x = c \cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{1}{\omega_0} \int^t f(t') \sin \omega_0 (t - t') dt'$

## ○ 外力 $f(t) = f_0 \sin \Omega t$ の場合

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \Omega t$$

この一般解は

$$x = c \cos(\omega_0 t + \delta) + f_0 \frac{\sin \Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)}$$

$\omega_0 = \Omega$  の場合

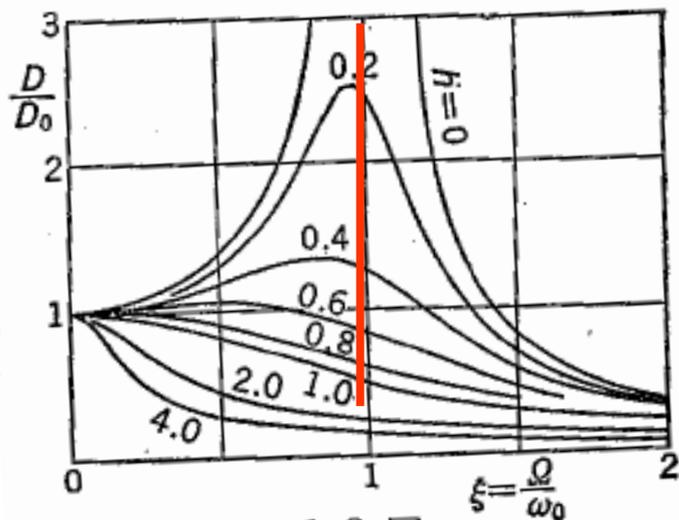
○ そのままでは左辺第2項は  $\frac{*}{0}$  となる。そこで

$$x = c' \cos(\omega_0 t + \delta) - f_0 \frac{\sin \omega_0 t - \sin \Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega_0^2)}$$

第2項は  $\Rightarrow \lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} \frac{\sin \omega_0 t - \sin \Omega t}{\omega_0 - \Omega} = t \cos \omega_0 t$

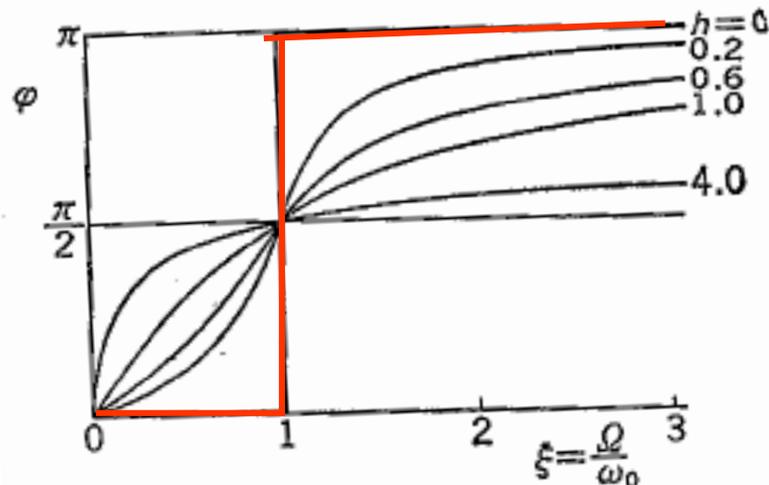
つまり、時間とともに線型的に増加する解となる

## 外力の振動数に対する振幅



1.8 図

## 外力の振動数に対する位相のずれ



1.9 図

- ・この解は  $h=0$ ,  $\xi = 1$  (粘性がなく振動数が同じ) 場合であり、共鳴解であり、時間と共に発達する。
- ・位相に関して、外力の振動数が小さい時は、変位はそれについてゆく。しかし、 $\Omega$  が大きくなると、外力の変位とは逆になる。その境界は  $\Omega = \omega$  である。

# タコマナローズ橋の崩壊

身近な振動と共鳴の数々・タコマ橋の落下

*www.osaka-*

*kyoiku.ac.jp/~masako/exp/melde/tacoma.html*



アメリカ、ワシントン州で1940年11月7日に起きたタコマ橋の落下事故の映像です。タコマ橋は同年7月に開通してわずか4ヶ月後、しかもたった風速19m/sという風によってねじれ振動が生じ、その振幅が増大してケーブルが破断され、遂には落下してしまいました。しかし風による力を考慮に入れた設計(\*)がなされており、計算上では風速60m/sまで耐えられるはずでした。

風が吹くことで橋の周りに渦ができて、その渦からの周期的な力とタコマ橋のねじれ振動が共振を起こしてしまったのです。(渦励振)

《タコマ橋の問題点》

- 1.「たわみ理論を盲目的に使った」
- 2.「橋桁の形が不安定」

# 身近な振動と共鳴の数々 兵隊の行進で落ちた橋



フランスではバス・シェーヌ吊橋の大惨事という事故がありました。1850年フランスのアンジェにて500人の歩兵隊が行進していたところ、一度に487人の人が吊橋と一緒に落ち、そのうち226人が亡くなりました。軍隊の歩調に吊橋が共振してしまったからだといわれています。それからフランスでは「吊橋の上で歩調をとるべからず」という立て札が立てられるようになりました。

身近な振動と共鳴の数々・兵隊の行進で落ちた橋

[www.osaka-kyoiku.ac.jp/~masako/exp/melde/heitai.html](http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~masako/exp/melde/heitai.html)

# 心柱(しんばしら) — 共鳴させない方法 —

法隆寺五重塔の中心を心柱(しんばしら)が貫く。心柱はどの五重塔にもあるが、他の部材にほとんど固定されておらず、何のために設けられているのか、長年、謎に包まれていた。

塔の頂上を飾る相輪(そうりん)を支えるだけという説が有力だったが、1982年、石田修三・京都工芸繊維大名誉教授(建築構造学)が「地震の際に塔全体の揺れを抑え、倒壊するのを防ぐ役割をしている」との説を唱え、注目を集めた。

実際、五重塔が地震で倒壊した記録はない。江戸時代以前に建てられた五重塔は現在、22基あるが、地震で大破した例すらない。「三重塔でも同じことが言える」と石田名誉教授。95年の阪神大震災では、兵庫県内にある十数基の木造の三重塔は1基も倒壊しなかったという。

なぜ五重塔や三重塔は地震に強いのか。石田名誉教授は、そのメカニズムを解明した。

地震の際、五重塔の各層が左右交互に揺れることは、これまでに法隆寺でも確認されており、上田篤・元京都大教授(建築学)によって、動きの特徴から「スネークダンス」と名付けられている。

石田名誉教授が五重塔の簡易な模型で実験したところ、心柱がある模型は、心柱のない模型より揺れが2倍以上、小さかった。模型はスネークダンスを起こし、心柱が本来接していない各層の梁（はり）と交互に接触し合うことで、揺れのエネルギーを、左右に分散させていたのだ。

塔の建築技術は飛鳥時代、朝鮮半島から日本へ伝わった。だが、心柱がいつどこで生まれ、どのように定着したのかは定かではない。果てしない試行錯誤の末、必要性が導きだされ、踏襲されていったのだろう。

先人の知恵と経験の結晶、それが心柱だった。

(2012年5月3日 読売新聞)

最新の高層ビルにも心柱が取り入れてある

## ○ 1次元の減衰振動

速度に比例した  $-\alpha \frac{dx}{dt}$

という形の抵抗を考える

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2\gamma = \frac{\alpha}{m} > 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x = e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases}$$

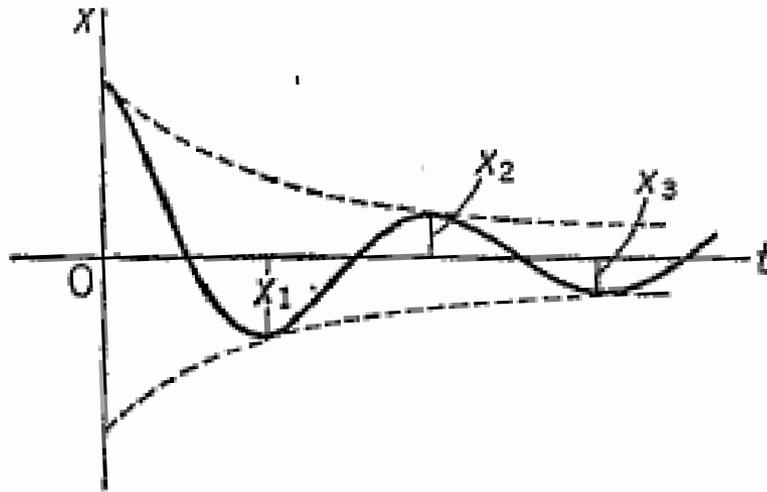
$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

### 三つの場合わけ:

- ・抵抗が小さくて  $\gamma < \omega_0$  の場合  $\Rightarrow$  減衰振動
- ・抵抗が大きくて  $\gamma > \omega_0$  の場合  $\Rightarrow$  過減衰
- ・ $\gamma = \omega_0$  の場合  $\Rightarrow$  時間とともに大きくなる、共鳴

・  $\gamma < \omega_0$  の場合 (減衰振動)

$\lambda_1 = -\gamma + i\omega$ 、 $\lambda_2 = -\gamma - i\omega$ 、ただし  $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$



1.6 図

・ 一般解;  $\mathbf{x} = \mathbf{c} e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \delta)$

・  $x=0$  になる時間間隔は  $2\pi/\omega$ .

▪  $\gamma > \omega_0$  の場合 (過減衰)  $\Rightarrow$  振動的ではない運動

▪ 一般解; 
$$x = c e^{-\gamma t} \left( A e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

▪  $\gamma = \omega_0$  の場合、 $\lambda$  は等根となり、このままでは一般解は得られない。そこで、

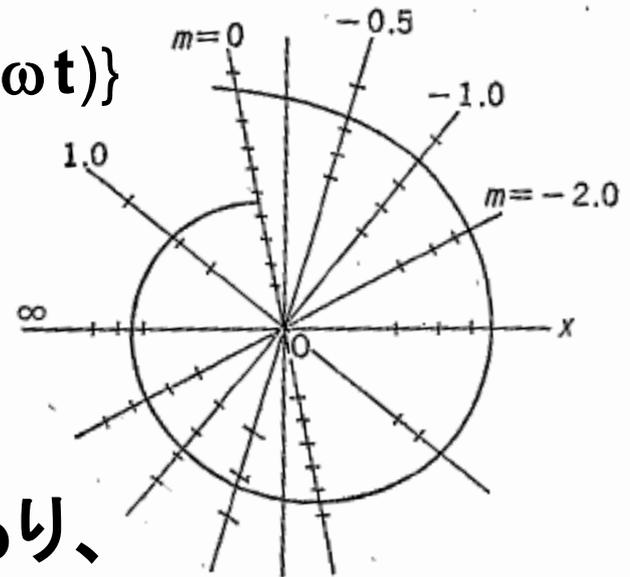
$$x = \lim_{\omega \rightarrow 0} \{ A e^{-\gamma t} \cos(\omega t) + B e^{-\gamma t} \sin(\omega t) \}$$

$$\rightarrow A e^{-\gamma t} + B' e^{-\gamma t} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

$$= A e^{-\gamma t} + B' e^{-\gamma t} t$$

$$= e^{-\gamma t} (a + bt)$$

ここで、 $A, B, B', a, b$  は任意定数であり、それぞれ独立



1.7 図