基礎方程式

流体の運動を論ずるのに、二つの立場がある。

1） ラグランジュ的な方法: ある流体粒子の時々刻々の位置を追跡し、これを粒子の最初の位置と時間の関数として記述しようとする立場。粒子の保存量の場合の追跡には適している。

2) オイラー的な方法: 流体粒子は時間を自由に移動するが、空間の各点各瞬間の流体の流速･圧力･密度を固定座標系の位置の関数として記述する立場

⇒ オイラー的な方法が一般的

オイラーの運動方程式

質量力を $\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$ **とすると、**

$$\frac{Du}{Dt}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

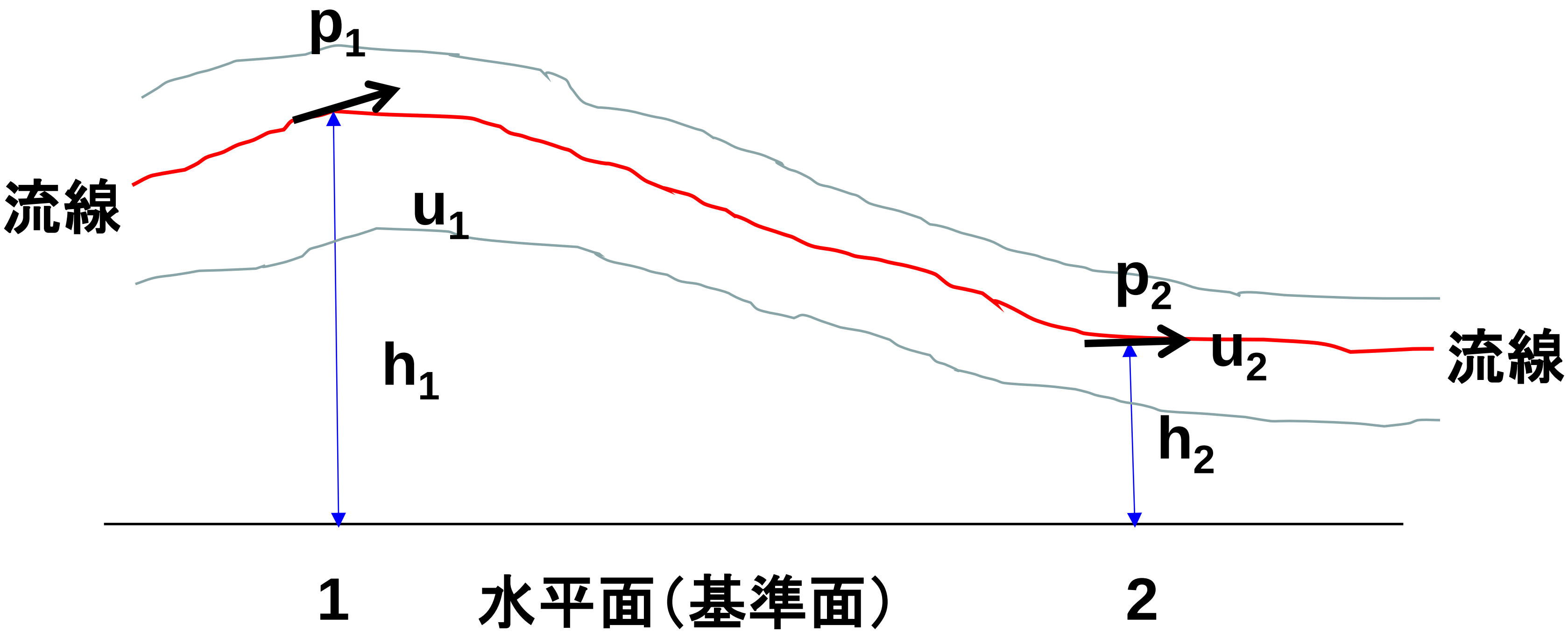
$$\frac{Dv}{Dt}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{Dw}{Dt}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

オイラーの運動方程式（Euler's equation of motion）

日野幹雄「流体力学」より

定常な流れを考える。
その場合流線が定義できる。

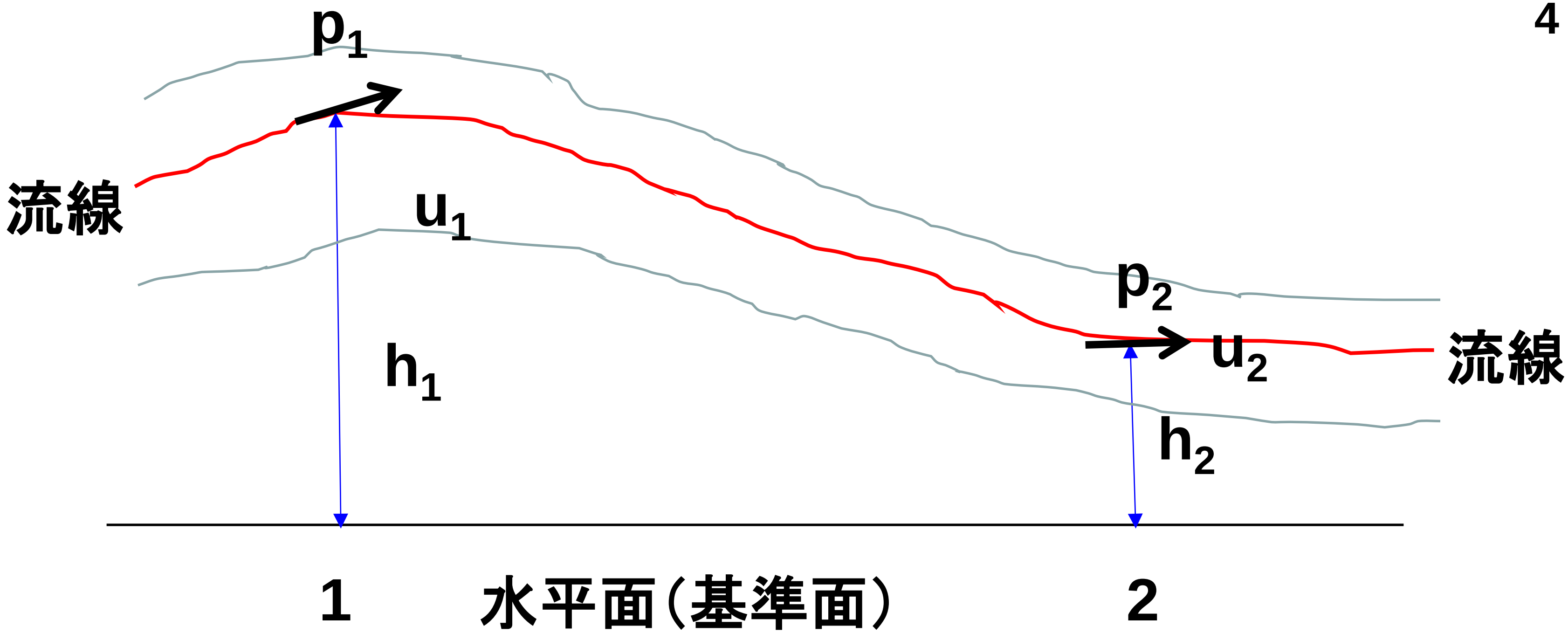


流線に沿って、全エネルギーが保存する。

位置のエネルギー： ρgh

運動エネルギー： $1/2\rho u^2$

圧力エネルギー： p



点1と点2におけるエネルギー保存則：

$\rho g h_1 + 1/2\rho u_1^2 + p_1 = \rho g h_2 + 1/2\rho u_2^2 + p_2$

一般にベルヌーイの定理での表し方（密度の変化のない）

$$h_1 + \frac{u_1^{\ 2}}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = h_2 + \frac{u_2^{\ 2}}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}$$ ＝どこでも一定

オイラーの運動方程式からベルヌーイの式が導ける

流線sに沿ってオイラーの運動方程式を表すと、

$$\rho u \frac{du}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s$$

加速度項（移流）　圧力差による力　重力

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{u^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g_s$$

流線に沿って積分をすると、

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} dp + gz = \text{一定}$$

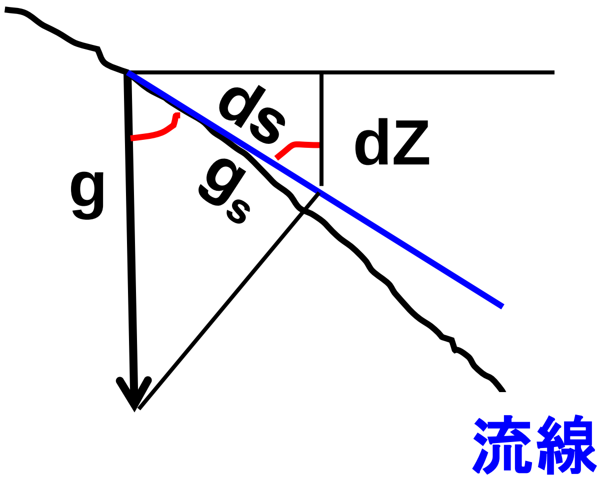
密度＝一定の場合 $\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} + gz = \text{一定}$

$$\rho u \frac{du}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s$$

g_sの変形

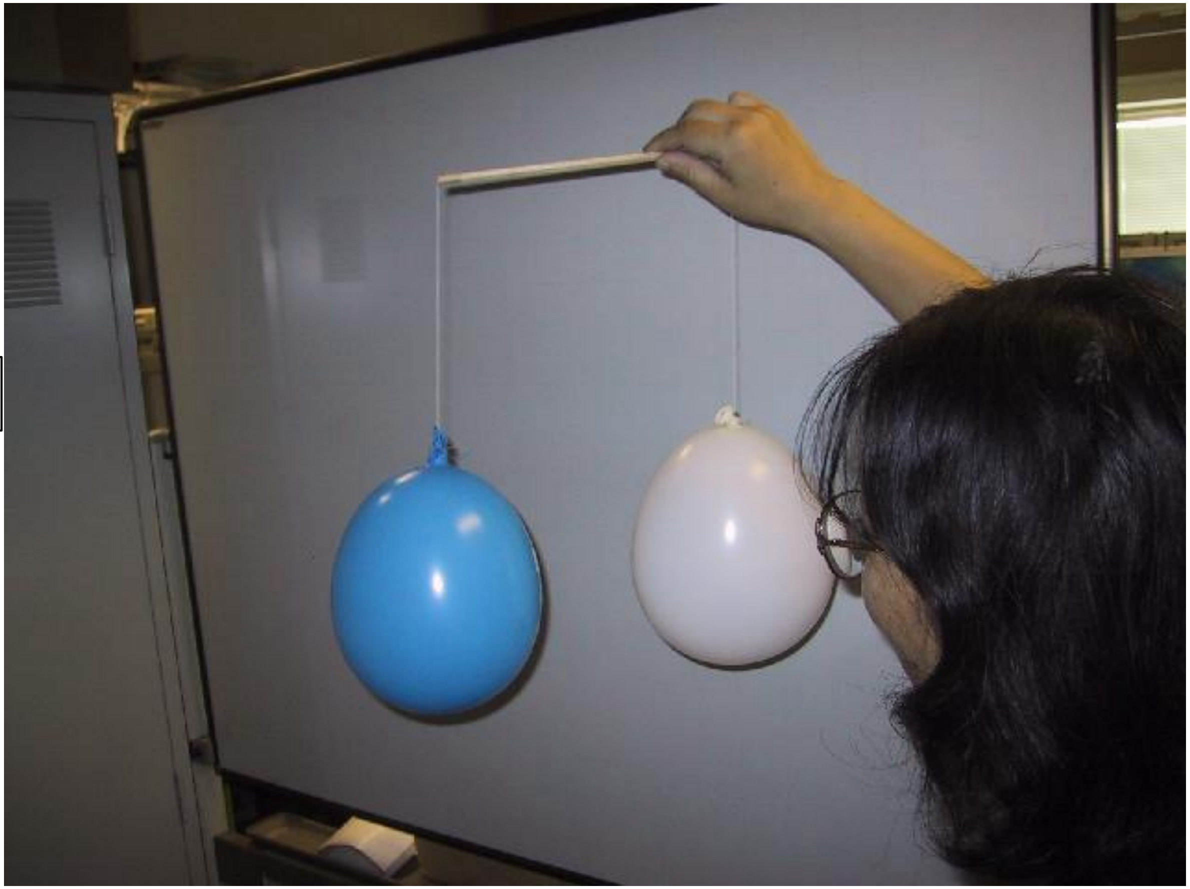
$$\cos\theta = dz / ds$$

$$g_s = g\cos\theta = g\, dz / ds$$



ベルヌーイの定理の応用例

図３



流れの物理学　関眞佐子　より

physics.gep.kansai-u.ac.jp/~physics/jugyo/seki/bunkei02.htm

● ベルヌーイの定理の応用

(i)トリチェリ(Torricellli, 1644)の定理;
流出口Bを通る流線をさかのぼると、
必ず水面のある一点Aに達する。流速をqとすると

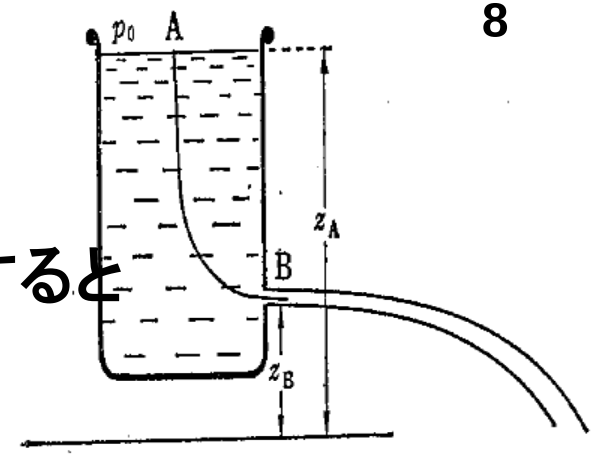


図 14 水槽からの流出

$$\frac{q_A^{\ 2}}{2}+\frac{p_A}{\rho}+g\,z_A=\frac{q_B^{\ 2}}{2}+\frac{p_B}{\rho}+g\,z_B$$

$q_B >> q_A$として、p_Aもp_Bも大気圧p_0に等しいとすると、

$$q_B=\sqrt{2g\left(z_A-z_B\right)}$$

日野幹雄「流体力学」より

○water jet cutter:

300MPa程に加圧された水を0.1mm～1mmほどの小さい穴などを通して得られる細い水流で、切断などの加工を行う。ただし、「切る」というよりは「水流の当たった部分を吹き飛ばす」ととらえるほうが正しいイメージである。水流の速度は、多くの場合500～800m/s程だが、マッハ3に達する高速なものもある。水流の速度を落とし、金属面やガラス面についた汚れを落とすこともできる。(ケイヒャーの高圧洗浄機のCM)

(ウィキペディアより)

(ii)ピトー(Pitot, 1732)管:

流れの中に前面が丸みを帯びた物体を置くと、流れはよどみ点でせき止められる、よどみ点では流速が0で、高度差を無視すると、

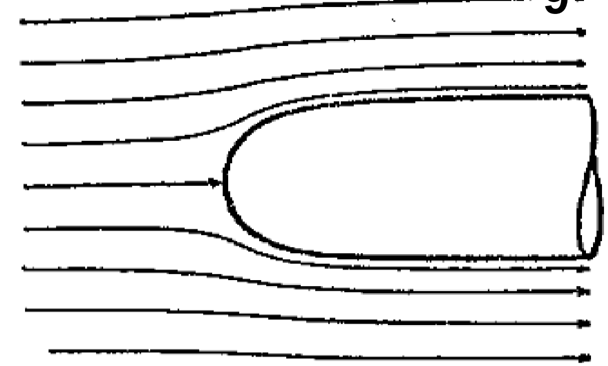
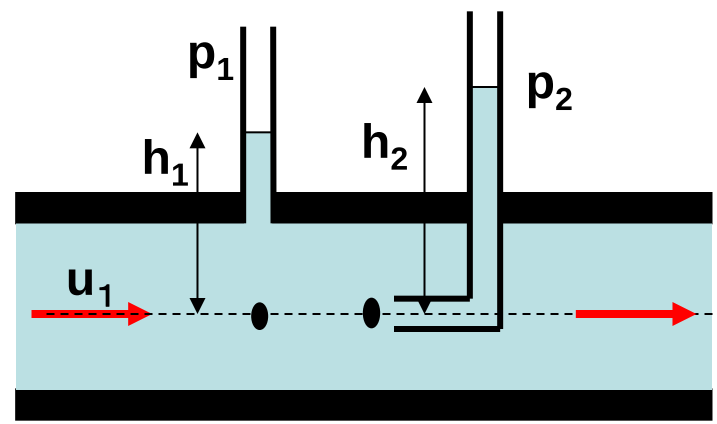


図 15 丸みをおびた物体まわりの流れ

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1{}^2 = p_2$$

p_2 静圧　　p_1 動圧

$p_2 + p_1$ 総圧 (total pressure)



$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p_1)}$$

トコトンやさしい流体力学の本
久保田浪之介

・ピトー管は総圧と静圧を測定することによって流速を求める計測器
・ピトー管は水や空気などの流速測定ができる
⇒　飛行機に不可欠な速度計

オイラーの連続の方程式

(x、y、z)を中心に固定した仮想的な微小平行六面体:
X軸に垂直な二つの面を通って時間(t 〜 t+δt)に
出入りする流体の質量を評価する。

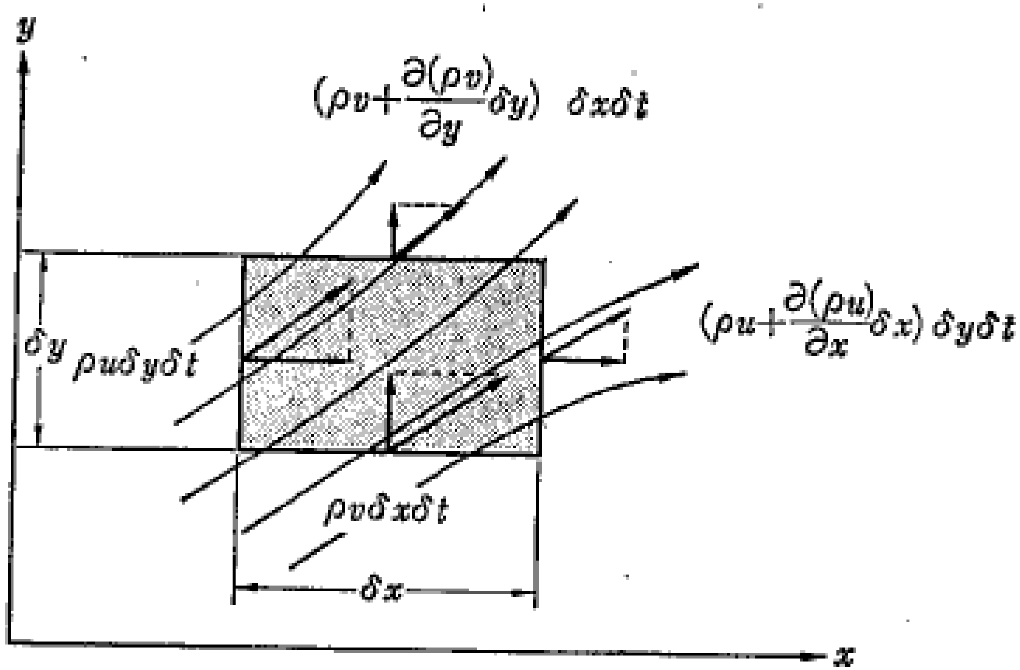


図 6　微小直方体への流体の流出入

日野幹雄「流体力学」より

これら3項の総和は、六面体の質量の増加分

(密度の増加分×体積) $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\delta x \delta y \delta z \delta t$

と等しくなければならない。

これから、連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt}+\rho\vec{\nabla}\vec{v}=0}$$

$$\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

となる。

$$\vec{\nabla}\vec{v}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

もし流体が縮まない流体の場合、ρの実質微分は0であるから

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0} \quad \Rightarrow \quad div\,\vec{v}=0$$

日野幹雄「流体力学」より

鳥の群れ、虫の群れ、人の群れ

例:　サッカー会場のウェーブ、

・鳥の群れ

リーダーがいるのか？　⇒　No

コミュニケーションをとっているのか？　⇒　No

群れる条件　（クレイグ・レイノルズ）

（bird-like droids ⇒boids）　人工生命シミュレーション

1.群れの仲間との衝突や近接遭遇を避ける
2.近隣の鳥の平均方向にあわせて並ぶ
3．お互いにくっつく。近隣の鳥の平均的重心に向かって動く

これらの条件で群れの運動を再現している。しかし、このルールの特徴はどこにも「群れを作れ」といっていないことである。

www.nuis.ac.jp/~nakada/researches/ComplexSystem　P.ボール　流れ　より