●ベクトルの内積と外積

・スカラー量：大きさのみで方向性はない　　例：質量、エネルギー、速さ
・ベクトル量：大きさと向きがある　　例：速度、加速度、力、流速、風速

ベクトルの表現

互いに直交する単位ベクトル（大きさが1）を用いて表現する。
通常 x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ、$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ と表し、

ベクトル $\vec{A}$ は、$A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ と表すことができる。　2-5

ここで、A_x, A_y, A_z はそれぞれベクトル $\vec{\mathbf{A}}$ の方向の成分でスカラー量である。

例　$\vec{A} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$　　二次元の場合 $\vec{A} = -4\vec{i} + 5\vec{j}$

ベクトルを→を用いて表すのではなく、太文字で書くこともある。

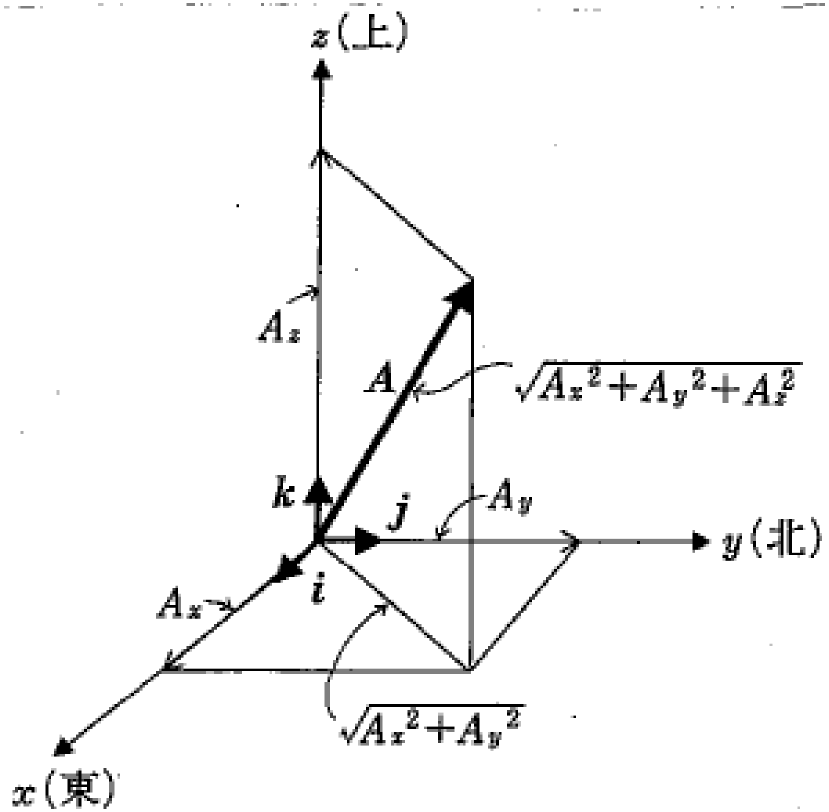


図 1.7 単位ベクトルとベクトル A の絶対値

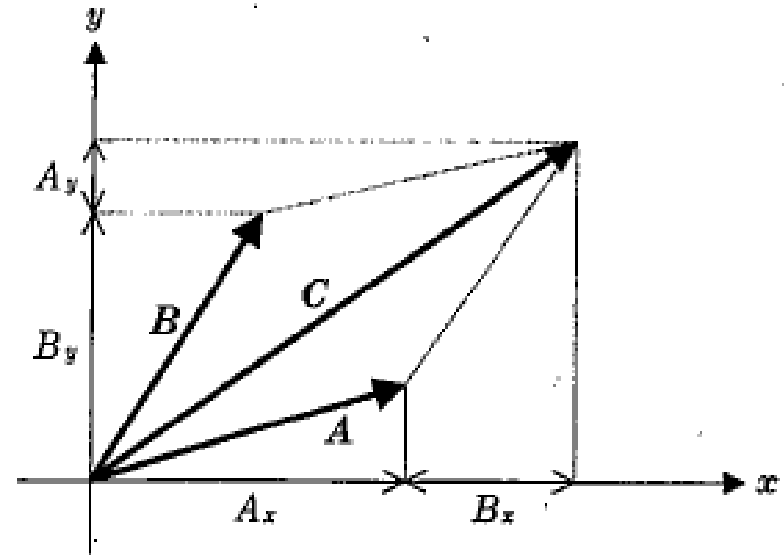


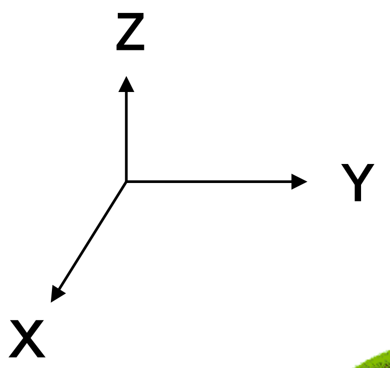
図 1.8 ベクトルの和と差

2次元 （3次元も同様に拡張できる)

$$\vec{A}+\vec{B}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+B_x\vec{i}+B_y\vec{j}=(A_x+B_x)\vec{i}+(A_y+B_y)\vec{j}$$
$$\vec{A}-\vec{B}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}-B_x\vec{i}-B_y\vec{j}=(A_x-B_x)\vec{i}+(A_y-B_y)\vec{j}$$

●今後さまざまな直交座標系が出てくる。

・右手系で記述する。(X、Y、Z)

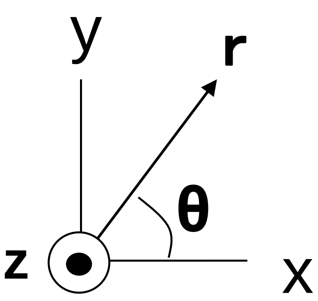


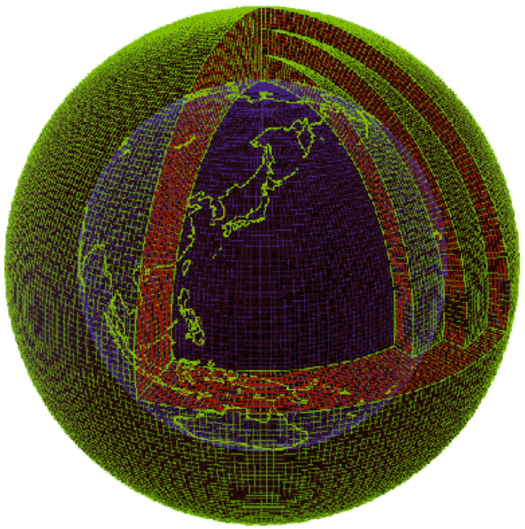
(1)　デカルト座標系(x、y、z)

(2)　球座標系(φ、θ、r)

(3)　円筒座標系(r、θ、z)

(4)　一般的な直交座標系





●Maclaurinの級数

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \bullet\bullet\bullet = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \bullet\bullet\bullet$$

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \bullet\bullet\bullet$$

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \bullet\bullet\bullet$$

●Taylorの級数

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \bullet\bullet\bullet$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

かつて物理数学の標準的教科書の「自然科学者のための数学概論」（寺澤、1941）が、テーラーの定理は「微分学において最も重要な定理であって、もしこの定理なかりせば微分学の活用範囲は実に哀れなものであろう」というほど、ありがたい定理なのである。（小倉「総観気象学」）

ベクトルの内積(スカラー積)

二つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ の内積はベクトル間の角度を θ としたとき、

$$(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$ と定義する。$(\cdot)$は内積の表現。 2-6

定義より $(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{A})$ である。

単位ベクトルは自分自身と内積が1、他の単位ベクトルとの内積は0である。

$$(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) = (\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) = 1$$

$$(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) = (\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) = 0$$, 2-7

したがって、二つのベクトルの内積はそれぞれの成分を用いて

$$(\vec{A}\cdot\vec{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$ となる。

例 $\vec{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ $\vec{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ とすると、

$$(\vec{A}\cdot\vec{B}) = 3\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 2 = 6$$ となる。

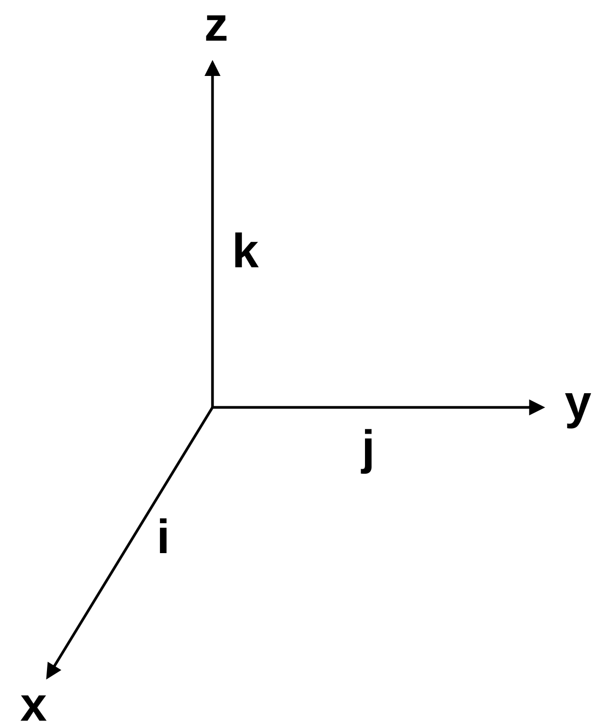
ベクトルの外積(ベクトル積)

二つのベクトル$\vec{A}, \vec{B}$ のベクトル間の角度を θ としたとき、ベクトル積 $\vec{A}\times\vec{B}$ は、$\vec{A}$を $\vec{B}$ の方向に回したとき、右ねじの進む向きに大きさ $\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\sin\theta$ をもつベクトルとする。 2.8

単位ベクトルで考えると $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$ 2-9

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j} \qquad \mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}, \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}, \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$$ 2-10

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\times(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})$$
$$=(A_yB_z-A_zB_y)\mathbf{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\mathbf{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\mathbf{k}$$



例

$$\vec{A}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \ \vec{B}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

の場合、外積は？

$$\vec{A}\times\vec{B}=(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})$$
$$=((-2)\cdot2-1\cdot1)\mathbf{i}+(1\cdot2-3\cdot2)\mathbf{j}+(3\cdot1-(-2)\cdot2)\mathbf{k}$$
$$=-5\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k}$$

基礎方程式

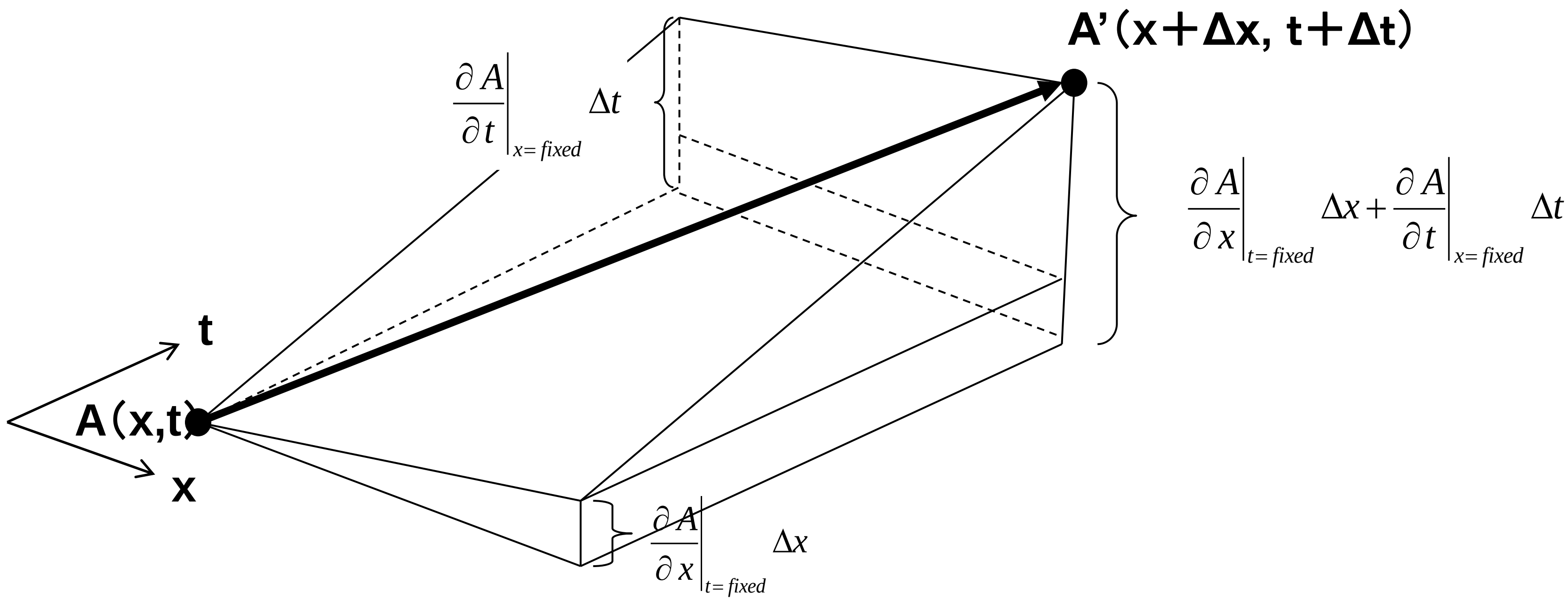
流体の運動を論ずるのに、二つの立場がある。

1） ラグランジュ的な方法： ある流体粒子の時々刻々の位置を追跡し、これを粒子の最初の位置と時間の関数として記述しようとする立場。
粒子の保存量の場合の追跡には適している。

2) オイラー的な方法： 流体粒子は時間を自由に移動するが、空間の各点各瞬間の流体の流速･圧力･密度を固定座標系の位置の関数として記述する立場

⇒ 流体の運動を記述するには、オイラー的な方法が一般的

２パラメータにおける物理量の微分



$$\mathbf{A'(x+\Delta x, t+\Delta t) \approx A(x,t) + \left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_{t=fixed}\Delta x + \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{x=fixed}\Delta t + \ldots}$$

例； $\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_{t=fixed}$ はx方向の傾きを意味する。t方向は固定して行う。

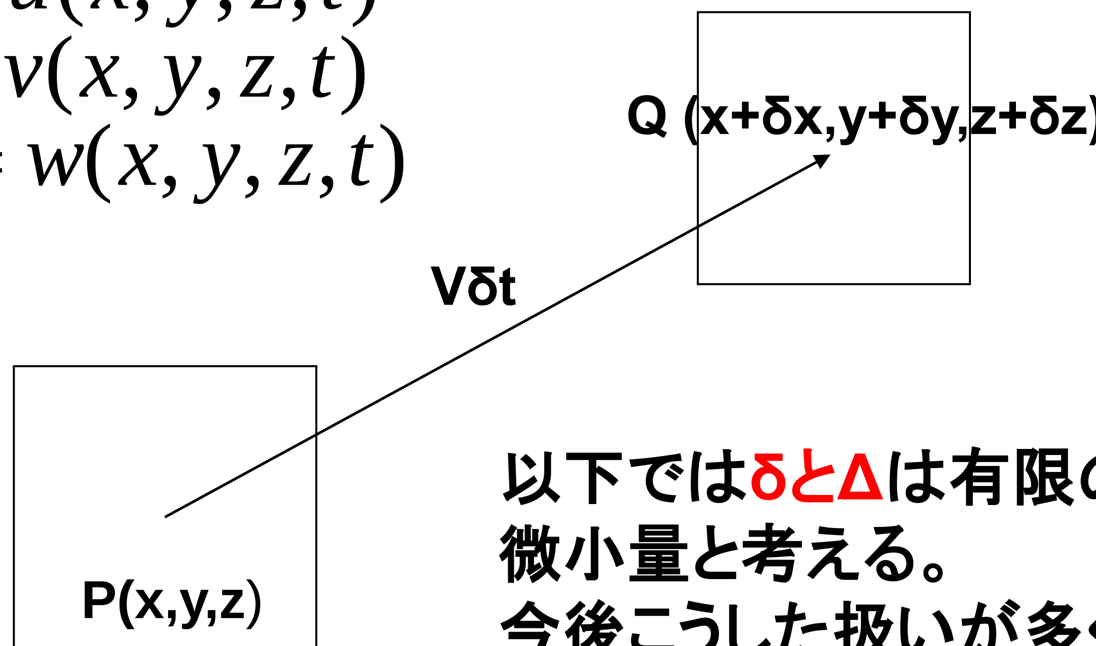
・一般ルール： 固定するパラメータは書かないので、省略。

・多パラメータの微分を偏微分、ラウンドd（∂）で表す。
１パラメータの微分を全微分、dで表す。

● 偏微分

３次元に拡張する。
点P(x、y、z) を中心とする小さい流体粒子を考える。

$$u = u(x, y, z, t)$$
$$v = v(x, y, z, t)$$
$$w = w(x, y, z, t)$$

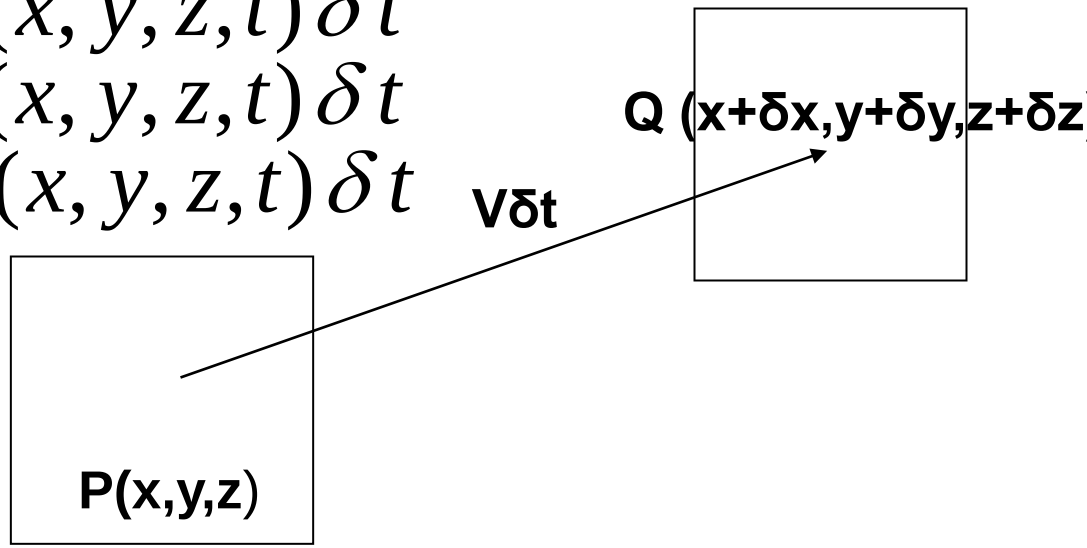


以下ではδとΔは有限の
微小量と考える。
今後こうした扱いが多く出てくる。

日野幹雄「流体力学」より

微小時間δtの後にP点の流体粒子は
Q点(x+δt、y+δt、z+δt)に移る。

$$\delta x = u(x, y, z, t)\,\delta t$$
$$\delta y = v(x, y, z, t)\,\delta t$$
$$\delta z = w(x, y, z, t)\,\delta t$$



この流体粒子の持つ特性の変化率を考える。それを f とする。
時刻t=t+δtでのQ点での特性 f はオイラー表記では

$$f + \delta f = f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t)$$
$$= f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \frac{\partial f}{\partial t}\delta t + \bullet\bullet\bullet$$

となる。

●Gradient, Rotation, Divergence

スカラー関数の勾配(Gradient)

$$\boxed{grad\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j})\phi}$$ と書ける。 2-11

例えば、$\phi = const.$ を等高線とすると、$grad\phi$ は斜面勾配を表し、ベクトル量である。等高線に沿って、勾配は 0 となる。 (圧力勾配に使う)

例 $\phi = 2x + 3y$ のとき、$grad\phi = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ となる。

ベクトルの回転(Rotation)

ベクトル $\vec{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$ に対し、

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} &= (\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{j}) \times (\mathbf{A}_x\mathbf{i} + \mathbf{A}_y\mathbf{j}) \\ &= (\frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial \mathbf{y}})\mathbf{k}\end{aligned}}$$

をベクトルの回転という。 2-12

回転ベクトルは、$\vec{A}$ を含む面に直交する。 (渦の表現に使う)

例 $\vec{A} = 2\mathbf{i} - 3x\mathbf{j}$ のとき、$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = -3\mathbf{k}$ となる。

ベクトルの発散(Divergence)(2次元のとき)

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = (\frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial \mathbf{y}})}$$ をベクトルの発散といい、スカラー量である。 2-13

(連続の式に使う)

例 $\vec{A} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$ のとき、$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = 2 + 3 = 5$ となる。

●行列（マトリックス）の定義と行列計算 （流体）

変数x_1、x_2、定係数b_1、b_2、a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}とする次のような線型式が成り立つとする。

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

行列式 det はdeterminantの略。

この解は、

$$x_1 = (a_{22} b_1 - a_{12} b_2)/(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}),$$
$$x_2 = (a_{11} b_2 - a_{21} b_1)/(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

となる。解を持つには、行列式 det＝$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$が必要である。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

と書けば、演算の方向は矢印の通り。

det＝$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$は次のような演算。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

左側からA^{-1}をかけると、定義に従って、

$$\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$$
$$\tilde{A}^{-1}\tilde{A}\vec{x} = \tilde{A}^{-1}\vec{b} \Rightarrow \tilde{E}\vec{x} = \tilde{A}^{-1}\vec{b}$$
$$\Rightarrow \vec{x} = \tilde{A}^{-1}\vec{b}$$

・左側からA^{-1}を演算することはできない。

・二つの正方マトリックスを $\tilde{A}, \tilde{B}$ とすると、

二つの積の行列は、一般に、$\tilde{A}\tilde{B} \neq \tilde{B}\hat{A}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\tilde{A}\,\tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

となり。

$$\tilde{A}\,\tilde{B} \neq \tilde{B}\tilde{A}$$

となる。

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\tilde{E}\,\tilde{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \tilde{C}\,\tilde{E}$$

となり

$\tilde{E}$ は単位行列という。

2×2行列だけでなく、n×n 行列でも同様。

●3×3 マトリックスの定義と行列計算の拡張

変数x_1、x_2、x_3、定係数b_1、b_2、b_3、a_{ij}(i,j=1,2,3)とする線型式:

$\Sigma a_{ij}\, x_j = b_i$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \det = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

行列式　$\det = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

ルール:上から右下方向は積算して＋、上から左下方向は積算して－する

左側からA^{-1}をかけると、定義に従って、

$$\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$$

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{A}\vec{x} = \tilde{A}^{-1}\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \tilde{E}\,\vec{x} = \tilde{A}^{-1}\vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = \tilde{A}^{-1}\vec{b}$$

●3×3 マトリックスの定義と行列計算の拡張

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$$

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{A}\vec{x} = \tilde{A}^{-1}\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \tilde{E}\,\vec{x} = \tilde{A}^{-1}\vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = \tilde{A}^{-1}\vec{b}$$

● ベクトル外積の見方

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\times(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\mathbf{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\mathbf{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\mathbf{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_yB_z-A_zB_y\\ A_zB_x-A_xB_z\\ A_xB_y-A_yB_x\end{pmatrix}$$

三次元となると、記号のルールが分かりやすくなる。

⇒　マトリックスを使うやり方の方がわかりやすい。

（宿題）

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$ の行列式とx、yを求めよ

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$ の行列式とx、y、zを求めよ

(3) sin x、cos x のx＝π/2のまわりのテーラー展開をせよ。
（3次項まで)

(4) e^xのx＝１およびx＝－１のまわりのテーラー展開をせよ。
（ただしe^1などの項はそのままで良い。3次項まで）

(5) 私の講義に関する問題点などあれば指摘してほしい。
面白かった点やわかりづらい点などの指摘でも結構。

回答は**月**日（＊）19時まで、私の共用ファイルまで投函のこと