

「環境流体力学」のシラバス(修正)

(第1回) 流体とはなにか？

(第*回) 講義で用いる物理・数学の復習

(第*回) 流体の運動方程式の導出

(第*回) 波動・・・音波・表面波・重力波

(第*回) 対流現象

(第*回) 流れのシア不安定

(第*回) 海洋

(第15回) まとめ

* 講義の進行の都合により、テーマがずれることがある。

流れの不安定

シア不安定に関する話題

(1)レイノルズ数

(2)大気の安定度と鉛直シア：
K-H波 (Clear Air Turbulence)

(3)水平シア： 順圧不安定

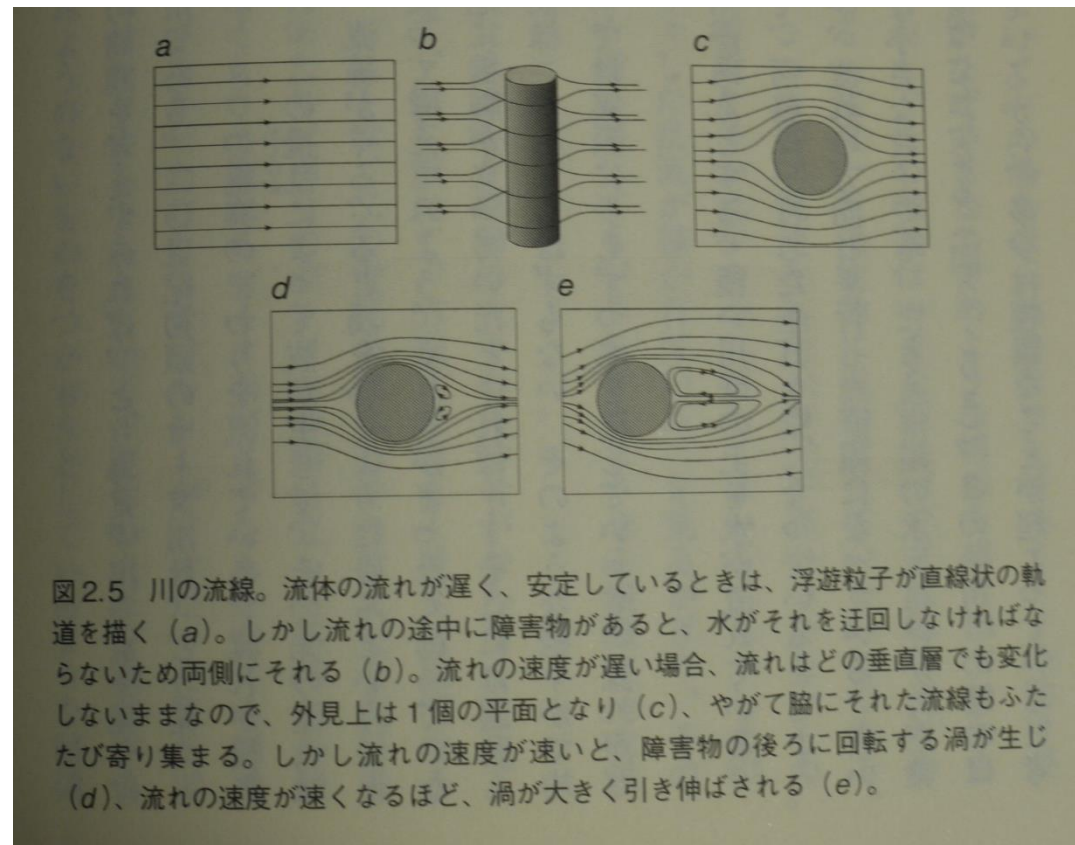
1. レイノルズ

流体運動では相似律が成り立つ

$$Re = \frac{U D}{\nu}$$

U : 代表的な流速
D : 代表的な長さ
ν : 粘性係数

P.ボール 流れ より



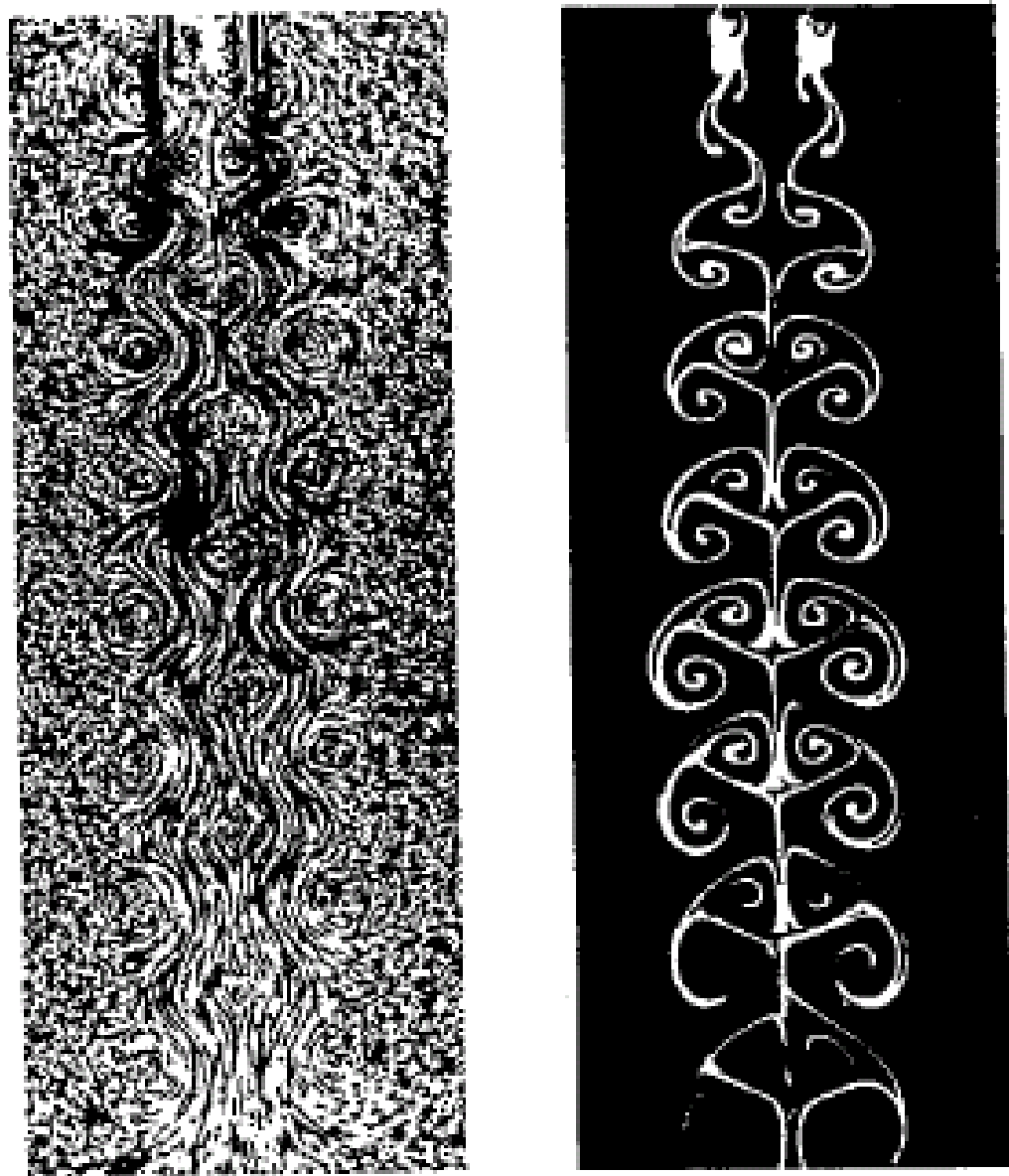


図 50 横に並んだ 2 つの円柱の後の流れのパターン
流線(左)と流脈線(右)では印象が異なる
(琉球大学・新垣義一氏による)

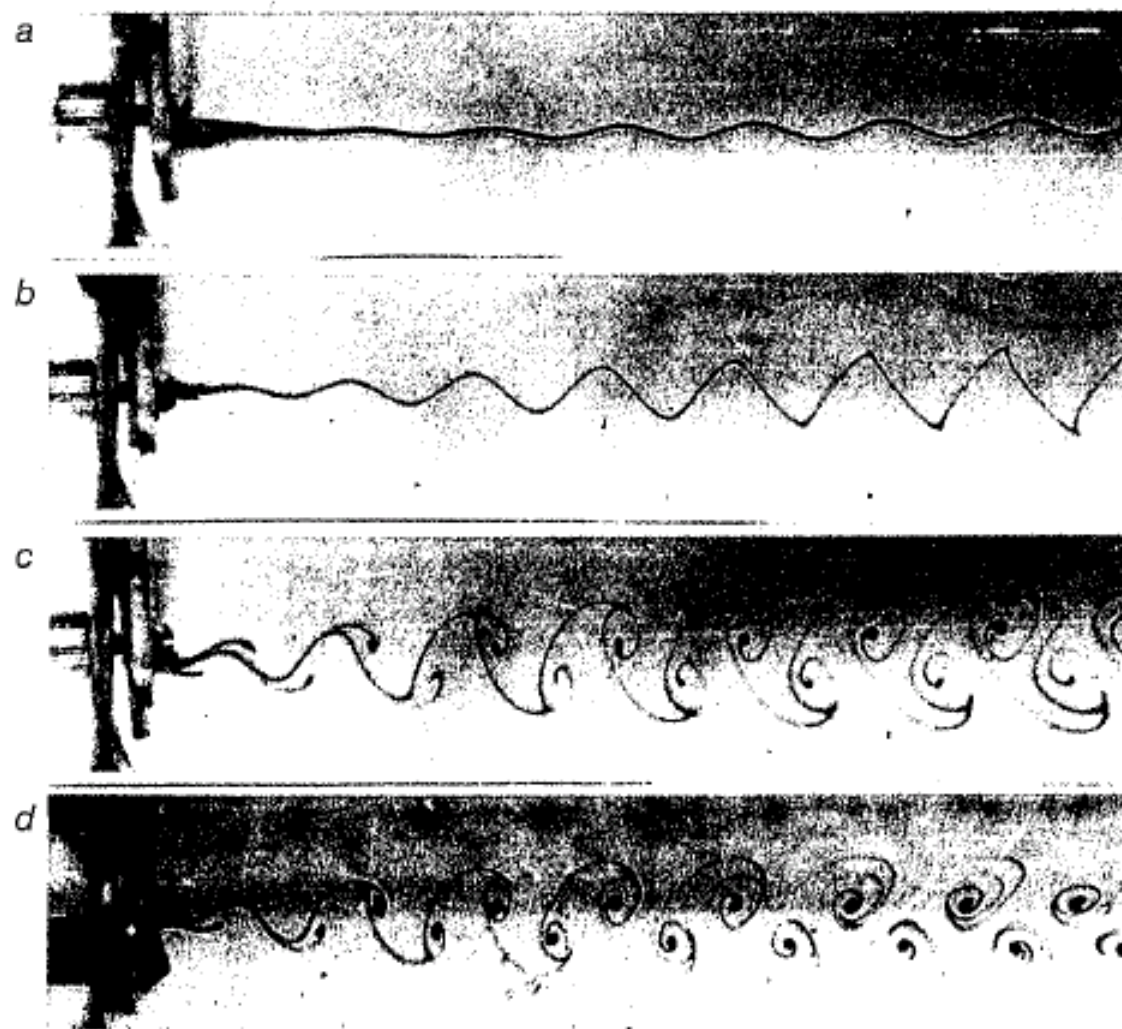
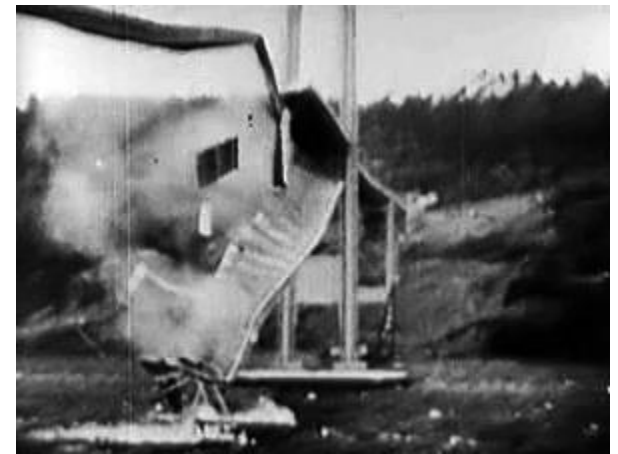
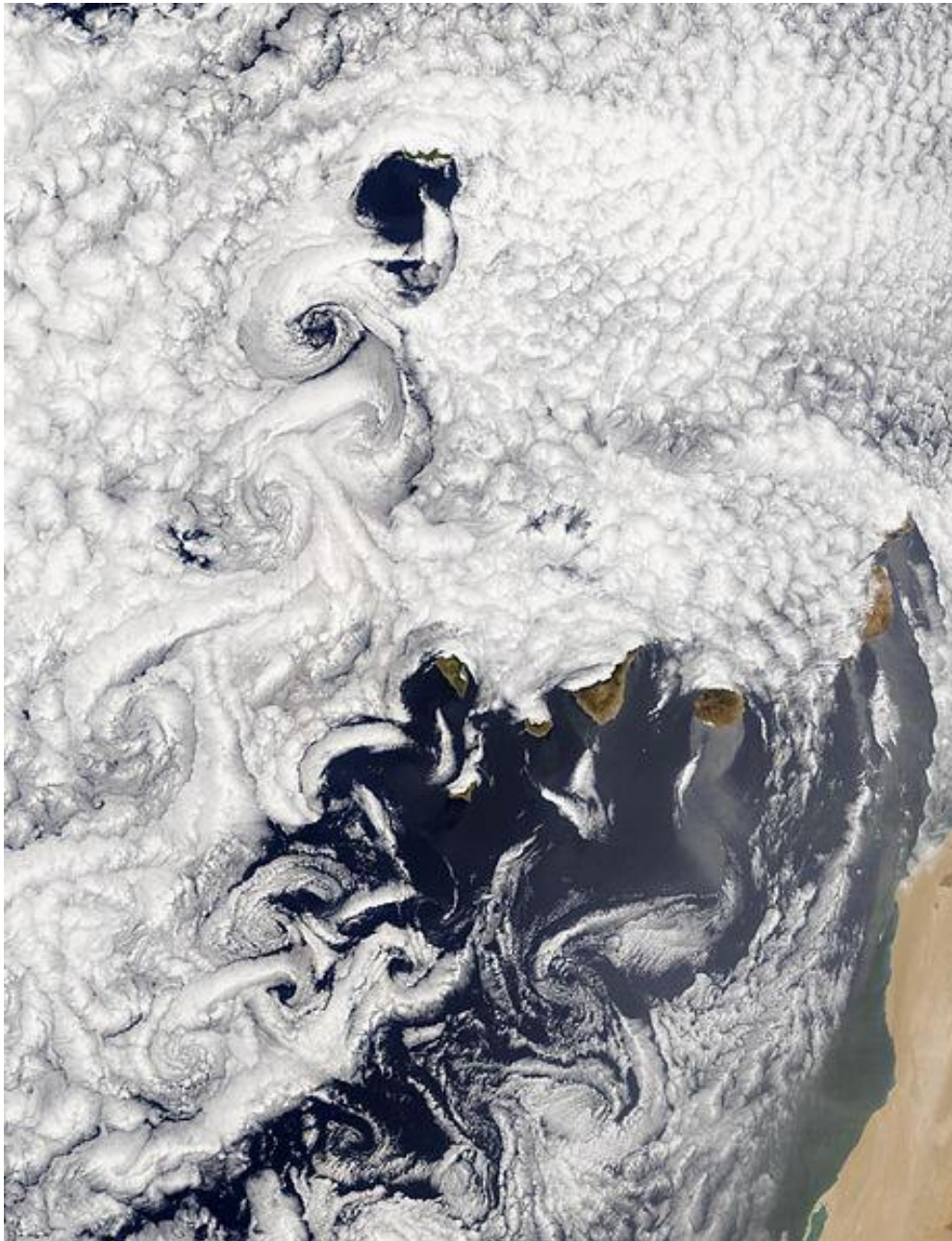


図 2.6 レイノルズ数 40 前後に相当する流動率では、この噴射した染料の軌跡にあらわれているように、円柱を越したあとの流れの軌跡が波形に揺れはじめる。流れの速度が大きくなると、この波形の揺れが一連の渦をつくりだす。これを「カルマン渦列」という (c、d)。レイノルズ数がおおよそ 200 以上になると、渦列が壊れて乱流後流を描くようになる。(From Tritton, 1988)



[Tacoma Narrows Bridge Falling.png](#)

カナリア諸島とマデイラ諸島
から南南西に伸びるカルマン
渦型

インターネットより

Re大の場合 ― 乱流

“あなたなら神様に何を聞く？”

ヴェルナー・ハイゼンベルグ：理論物理学者。1927年に不確定性原理を導いて、1932年に31歳の若さでノーベル賞を受賞

「神様に会ったら、私は二つの質問をするつもりだ。なぜ相対性があるのか。そして、なぜ乱流があるのか。神様はきっと、最初の質問には答えてくれると思う」

サー・ホーレス・ラム：数学者、流体力学の教科書を執筆

「私は年寄りですが、死んで天国に行ったら、そこで二つの問題についてご教示いただきたいと思います。ひとつは量子電磁力学で、もうひとつは流体の乱流運動です。前者については、割合に楽観的でいます。」

P.ボール 流れ より

3_culture

熱と温度

SPPモデル

一定の速度で移動している各「自己推進粒子」(Self Propelled Particle; SPP)は、ある一定の範囲内にいる隣の粒子の平均運動の方向に動く、というモデルを作る。このSPPモデルには、各粒子の運動にはランダムな要素—迷子になる性質—も与えられるとする。

このランダム性はノイズと称され、これがあまりに強いと、SPPはまとまりを失い、ちょうど気体の分子のように、ランダムに小刻みな運動をする粒子の集まりと化す。

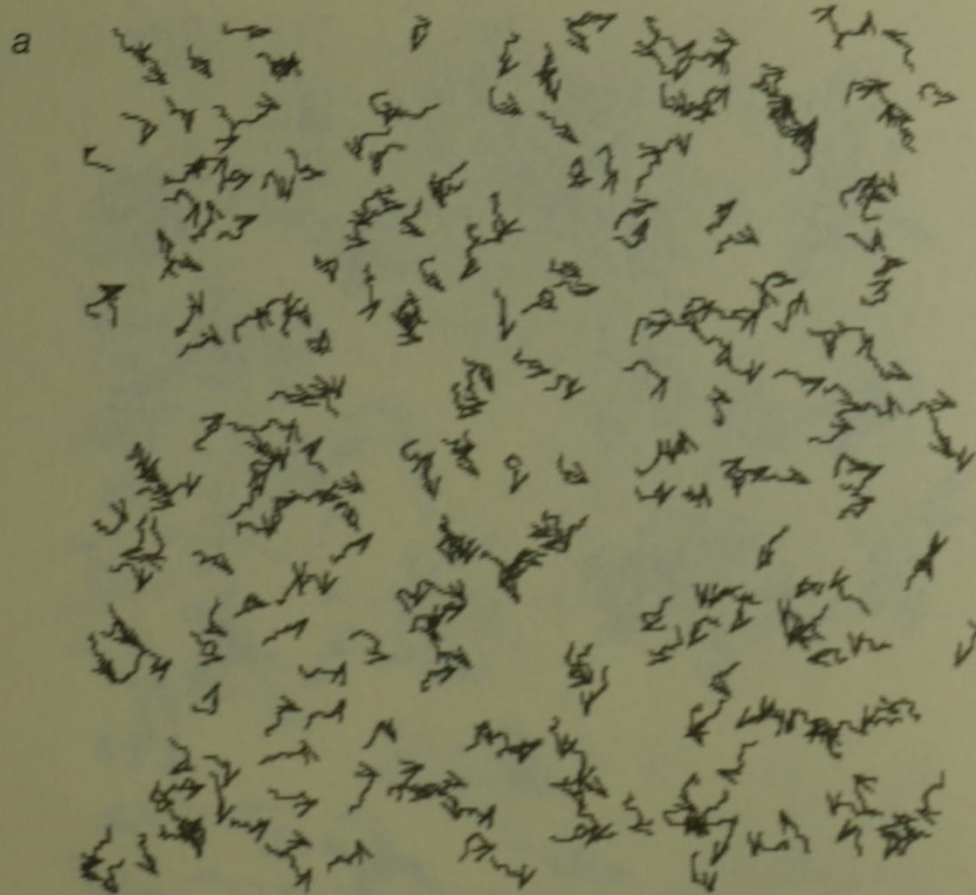
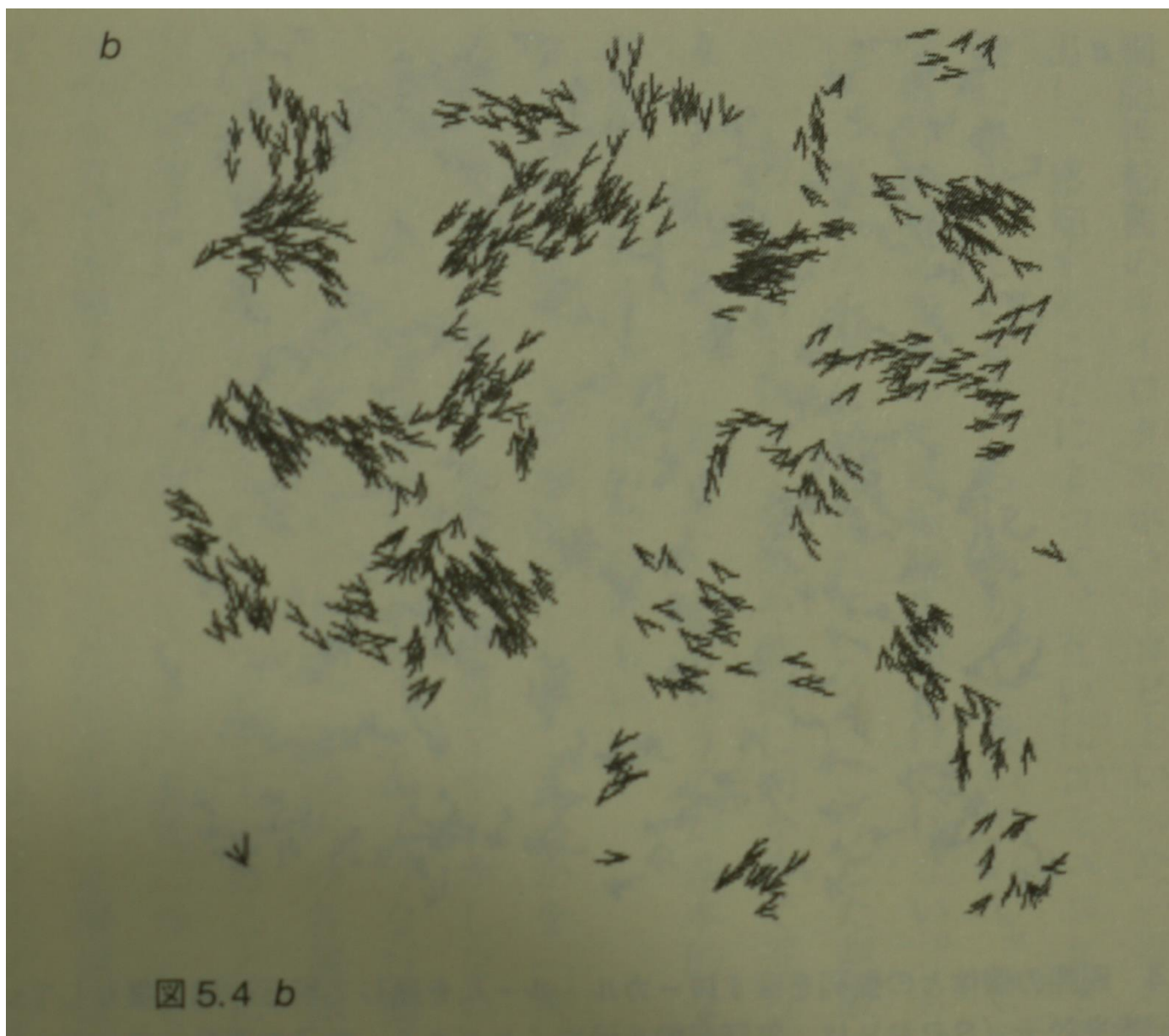


図 5.4 周囲の個体との整列を促すローカル・ルールを通じて相互作用を果たしている自己推進粒子 (SPP) は、集団行動を示すことがある。粒子の運動にランダム性 (「ノイズ」) があまりにも多く含まれていると、統一性は生じない (a)。しかしノイズが減少すると、粒子は寄り集まって整然とした群れをなす (b)。あるいは密集した密度がある程度まで高ければ、すべての流線が集まって一方向に向く (c)。

(Images: Tamás Vicsek, Eötvös Loránd University, Budapest.)



ノイズが減らされると、粒子は次第に整列し、ある空間にある程度の間隔をあけて集まると、小さな群れを形成してランダムな方向に集団運動をするようになる。そしてその動きには、旋回運動が含まれる傾向がある。(b)

さらにノイズが低くなって粒子が密接に集まると、出来上がっていた小集団が密着して、全体で集団運動しながら一方向に移動するようになる。(c)

c

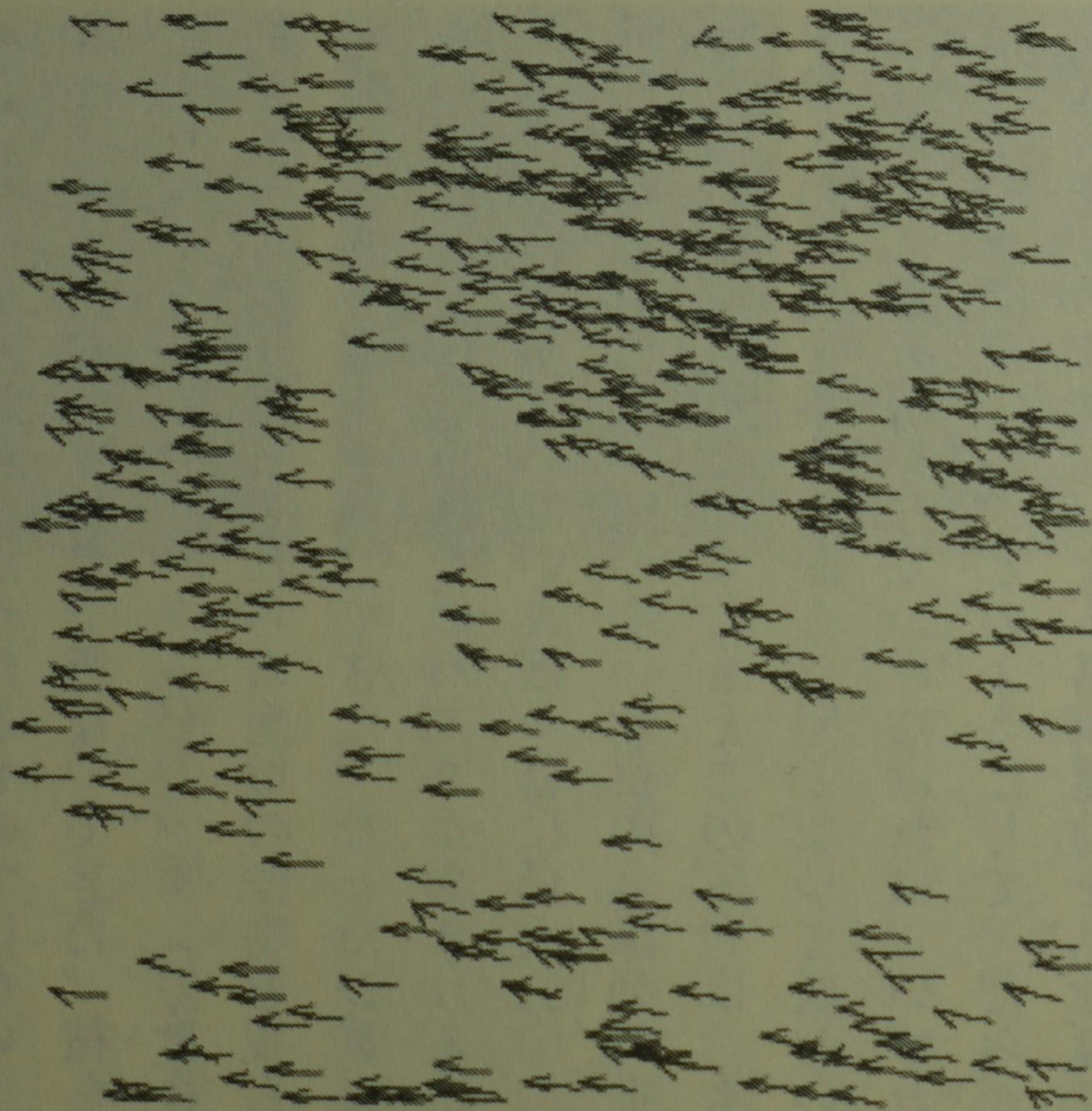


图 5.4 c

サバクトビバッタ

Solitary



Gregarious



インターネット より

- ・アフリカ、中東、アジアの農業に大打撃を与える。
- ・この昆虫は何世紀も昔から繰り返しそれらの地域の作物を荒らし、恐ろしい大襲来のアトハ飢饉と窮乏を残してきた。
- ・ひとたび群れが形成されると、あとはほとんど抑えがきかない。
- ・群れには数百億ものバッタが含まれ、風がよければ1日最大200kmも移動する。

サバクトビバッタ幼虫の相変異
(上)孤独相、(下)群生相

サバクトビバッタ

- ・この成虫の群れが空に飛び上がる前には、**翅のない幼虫の「隊列行進」**が形成される。長大な縦列が数kmにもわたって伸びる。
- ・行進する隊列にはたいてい一平方メートルあたりの地面に50匹前後のバッタがいる。
- ・サバクトビバッタにも**SPPモデル**がいうように密度に特定の閾値があるのだろうか？（ブールら）
- ・幼虫を円環状の装置に入れて、集団に個体が追加されると**行進**の様子はどう変わるかを観測した。

サバクトビバッタの観測結果

14

・密度を一平方メートルあたり12匹前後から295匹前後まで上げてみた。

＊ 密度が低い場合、バッタはランダムに歩き回った。

＊ 密度が一平方メートルあたり25匹から60匹に達すると、バッタは整列しはじめ、環状の装置を秩序正しく回ってゆくようになった。この運動の方向はおよそ1時間ごとに急に変わった。

＊ 一平方メートルあたり74匹前後になると、この方向転換は止まり、少なくとも観測期間の8時間は一度も変わらず、バッタの流れは本物の隊列行進のようにひたすら一方向に回り続けた。

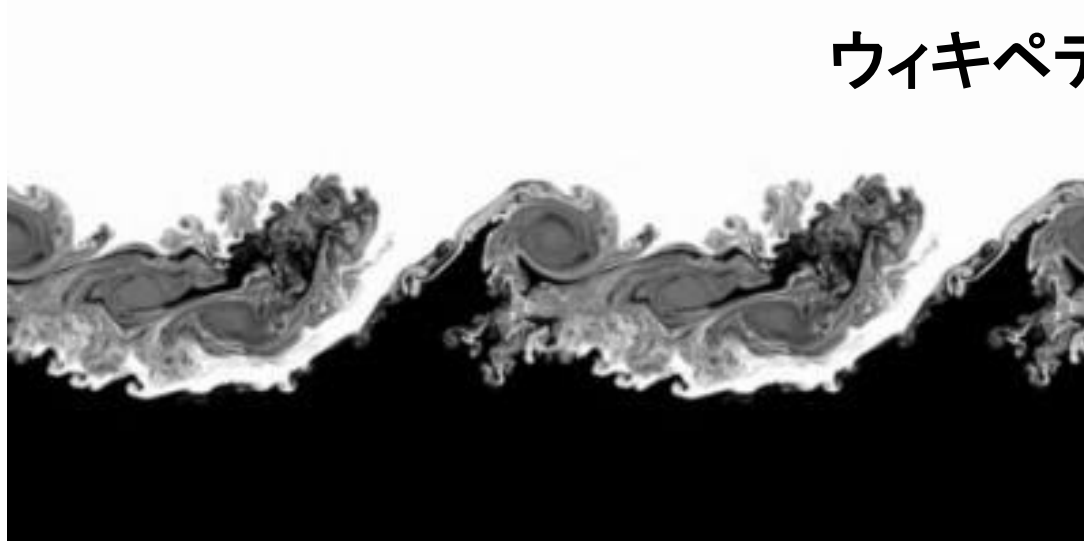
⇒ SPPモデルの予言と同じ

P.ボール 流れ より

2. Kelvin・Helmholtz (KH) 不安定

15

ウィキペディア



雲によって可視化
されたK-H波

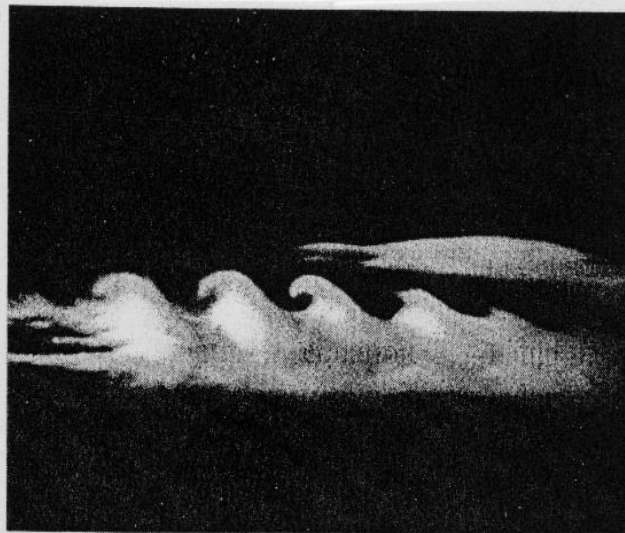


Figure 2.8 An example of Kelvin-Helmholtz waves on the edge of a small fragment of stratus cloud. (Photo by Brooks E. Martner, NOAA Wave Propagation Laboratory.)

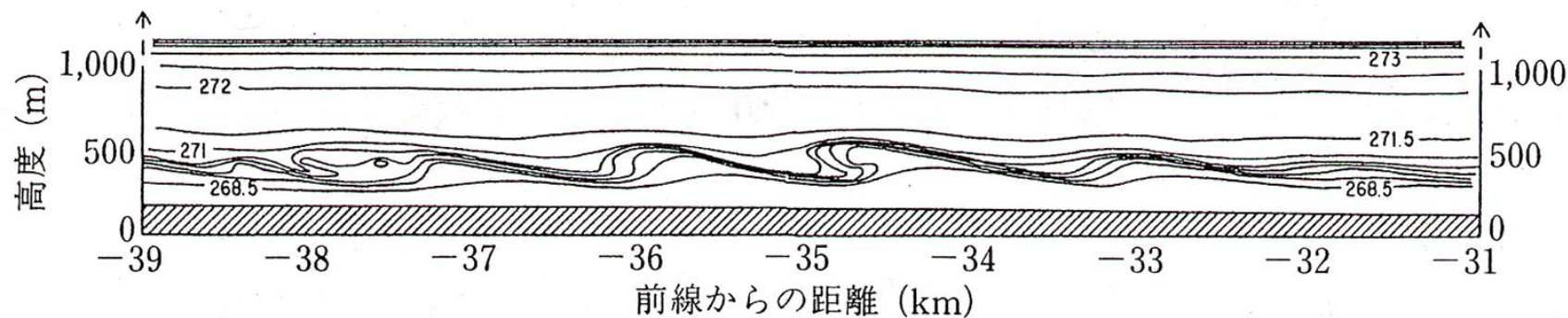


図 4.4 沿岸前線に伴う逆転層で発達したケルビン・ヘルムホルツ波における温位の分布（等温位線の間隔は 0.5 K; Nielsen, 1992; 米国ニューイングランドで航空機による観測）

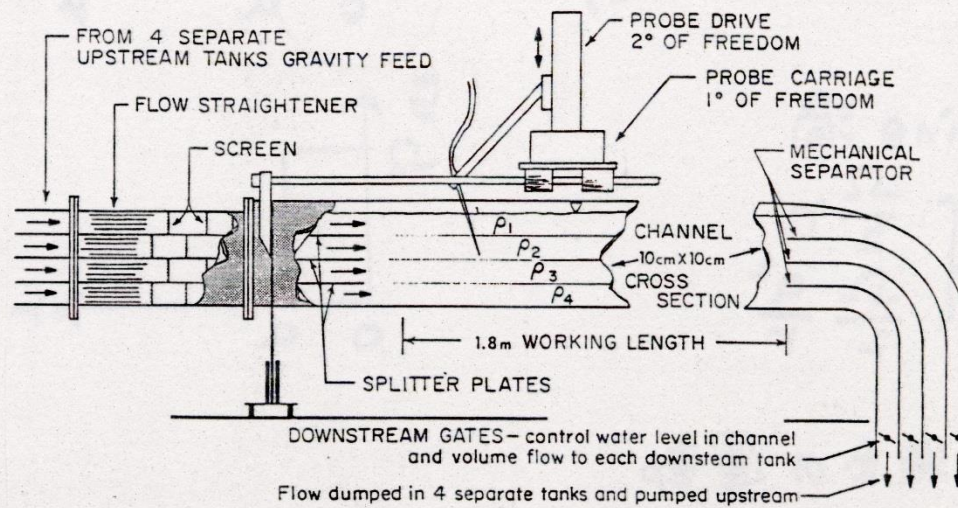


Fig. 1. Schematic of stratified-flow water channel.

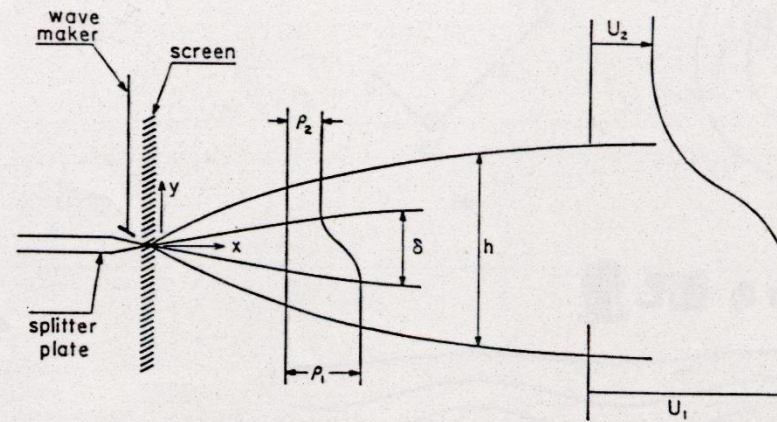


Fig. 2. Experimental set-up (not to scale).

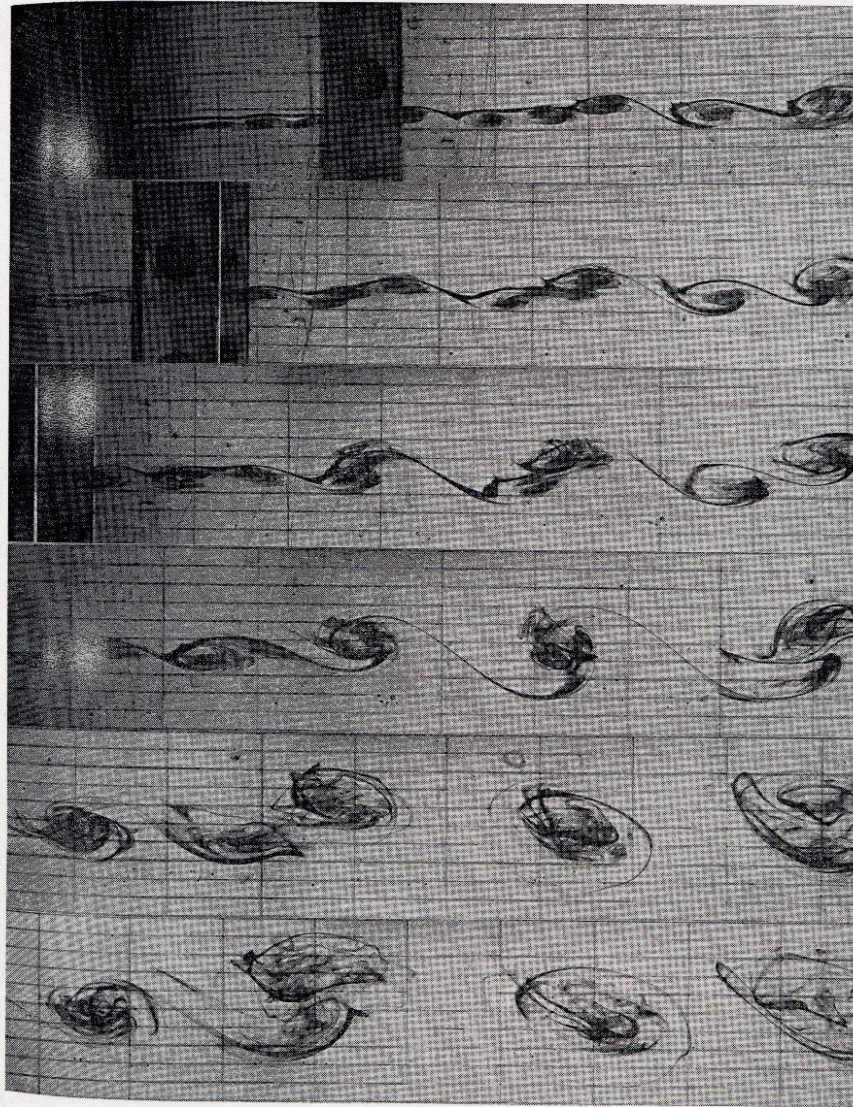


Fig. 3. The homogeneous shear layer with $\Delta U = 2.6 \text{ cm s}^{-1}$, $\bar{U} = 2.75 \text{ cm s}^{-1}$. The camera is moving with the mean velocity, $\bar{U}$. The distances from the origin to the center of each frame are, respectively 9, 12, 14, 22, 37, and 45 cm. Background grid: 2.5-cm horizontal spacing, 0.5-cm vertical spacing.

■実験⑥:K-H波(3層)



電腦
室内実験：K-H波(2層)

室内実験： K-H波(3層)

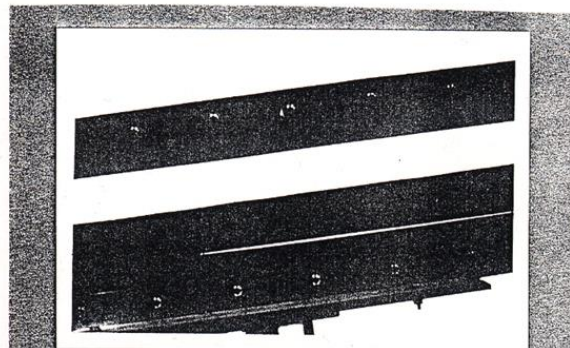
室内実験: K-H波 (2層まとめ)

2層(上:真水、下:塩水、密度差 0.05gcm^3)の液体の入った容器を傾ける

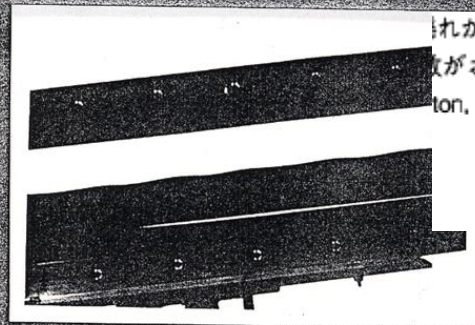
20

➡ 2層間に速度差が生じる

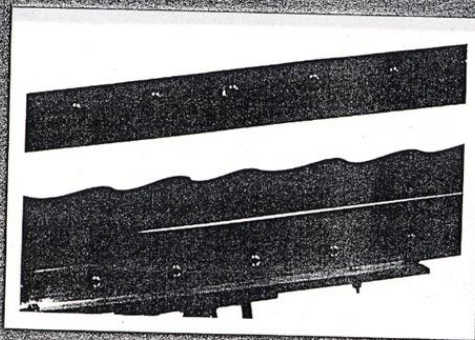
t=0s



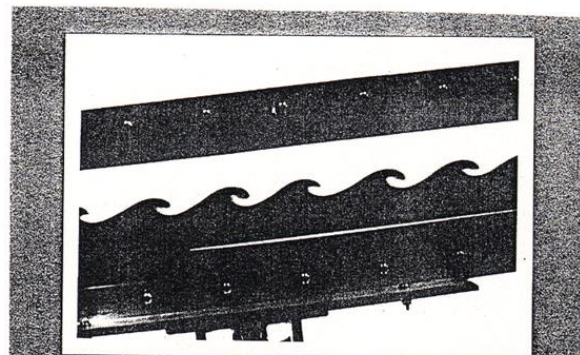
t=0.2s



t=0.4s

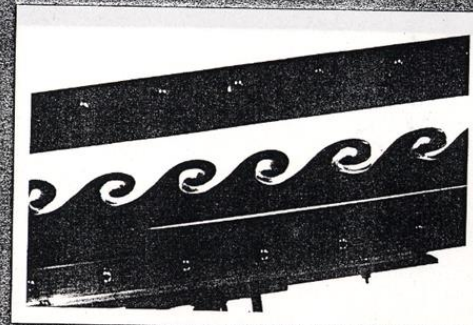


t=0.6s

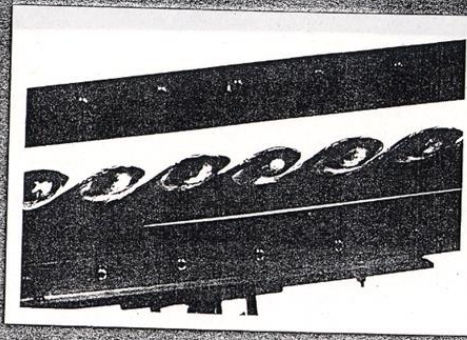


t=0.8s

れが一連の洞をつくりだす
数がおよそ200以上になる
(ton, 1988)



t=1.0s



●K-H波

ー密度成層した流体の流れに鉛直シアがある場合、与えられた密度差に応じてシアがある限界を超えたときに境界面で発生する不安定波

ーキーワード:密度成層、鉛直シア

* 鉛直シア:シアを解消するために上下で混ざろうとする

⇒ 波動を作るのが効率がよい

* 密度成層:強いほど上下転倒しづらく鉛直シアの解消を妨げる

重力と鉛直シアのせめぎあい

安定化しようとする要因

不安定化しようとする要因

●K-H波発生の必要条件

ー詳細な議論は省略。小倉(1997)参照。

$$\begin{aligned}
 Ri &\equiv \frac{-\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz}}{\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2} = \frac{\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz}}{\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2} \\
 &= \frac{(N : \text{ブランチバイサラ振動数})^2}{(\text{一般風の鉛直シア})^2} < \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Ri : リチャードソン数

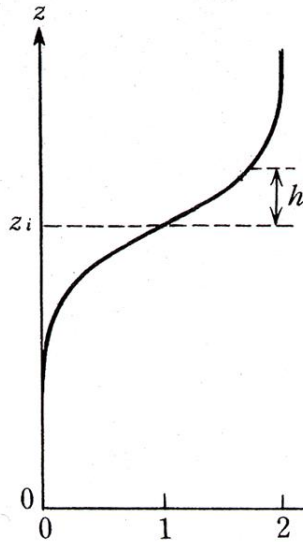


一般風の鉛直シアーが大きいほど、密度成層が弱いほどK-H波は発生しやすい

●K-H波の具体例(Davis and Peltier,1976)

ー基本場として具体的なプロファイルを与えてテイラー・ゴールドスタイン方程式を解く

与える基本場



$$\bar{u}(z) = \bar{u}_0 \left[1 + \tanh \left(\frac{z - z_i}{h} \right) \right],$$

$$\bar{T}(z) = T_0 + \Delta T \tanh \left(\frac{z - z_i}{h} \right)$$

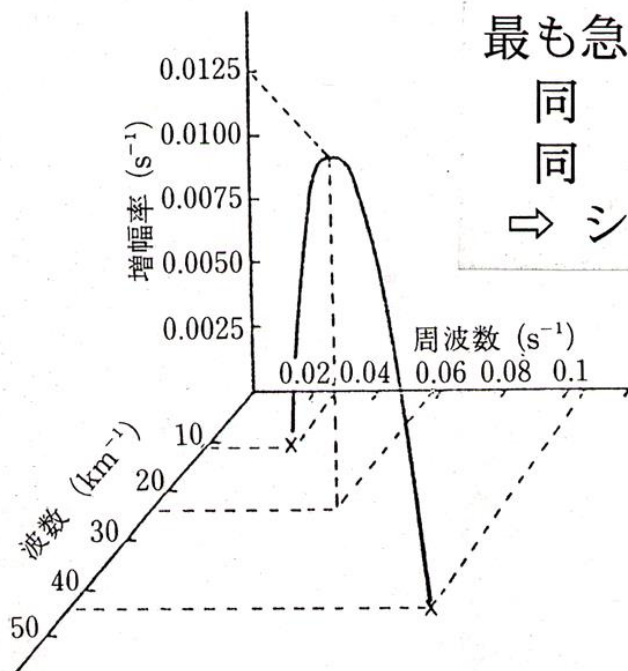
図 4.5 (4.10) で与えられた基本流の高度分布

$z=0$ が地表面で, z_i がシア層の中心部の高度. h はシア層の厚さ
の半分.

$\bar{u} = 2.4 \text{ms}^{-1}, T_0 = 271 \text{K},$
 z_i : シア層中心の高度 (可変),
 $h = 20 \text{m}$: シア層と温度の変わる層の厚さ,
 $\Delta T = 0.8 \text{K}$: 上下の温度差

境界条件

下端では $W(0) = 0$, 上端では上向きにエネルギーが伝播



最も急発達する不安定波の増幅率: 0.0125 s^{-1}

同 水平波数: $2\pi/24 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1} = 262 \text{ m}^{-1}$

同 位相速度: $0.58 \text{ s}^{-1}/24 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1} = 2.4 \text{ m s}^{-1}$

⇒ シア層の高度 z_i における基本場の速度と一致

図 4.7 波数 (k) の関数としての不安定 K-H 波の固有値 (ω_i と ω_r) (Davis and Peltier, 1976)

× は図 4.6 で示した 2 つの中立波の波数を示す. $z_i/h=15$, $h=20 \text{ m}$, $\Delta T=0.8 \text{ K}$, $\beta=1$ の場合.

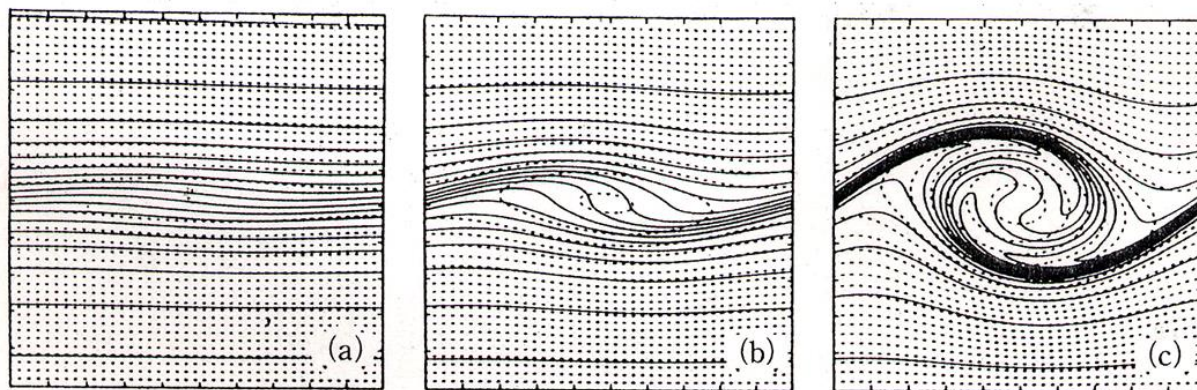
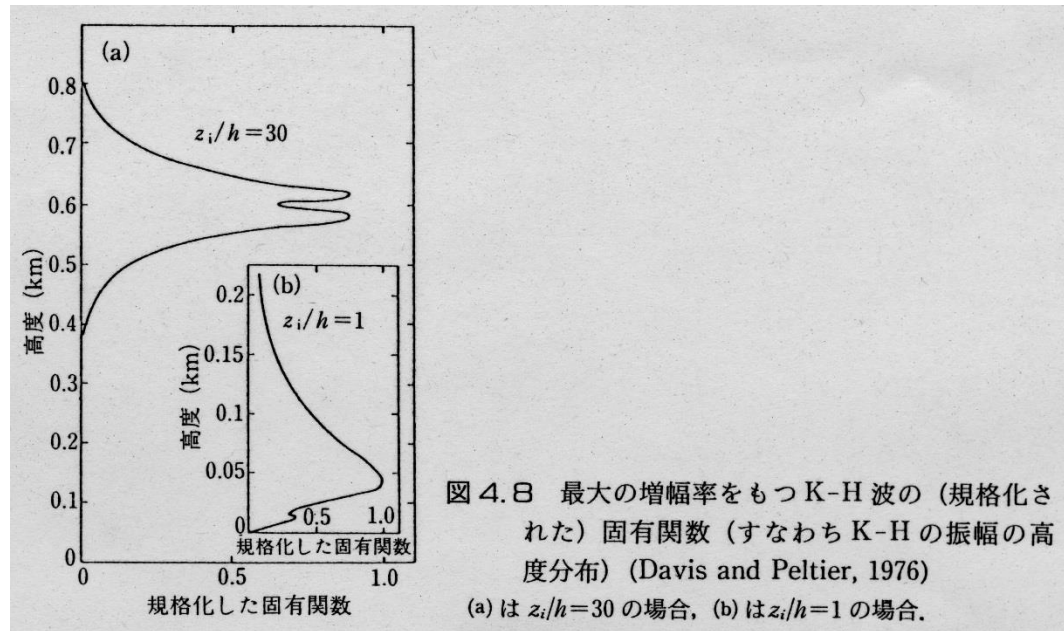


図 4.9 数値実験による K-H 波の進化の三段階 (Klaassen and Peltier, 1985)

破線が流線で実線が等温位線. $\bar{u}_0$ (速度差の半分) $= 2.4 \text{ m s}^{-1}$, $h=12.13 \text{ m}$, $\Delta T=0.8 \text{ K}$, L (積分領域の水平方向の広がり) $= 194 \text{ m}$, $z_i=62.47 \text{ m}$, H (積分領域の鉛直方向の広がり) $= 122.5 \text{ m}$, 初期の Ri の最小値 $= 0.07$, レイノルズ数 $= 500$ の場合.

最大増幅率を持つ $K-H$ 波の鉛直構造

- ① $z_i/h = 30 \Leftrightarrow z_i = 600\text{m}$ のとき
 - ・ シアー層付近に隔され、シアー層から離れると減衰
- ② $z_i/h = 15 \Leftrightarrow z_i = 300\text{m}$ のとき
 - ・ 同様の構造だが壁を感じて上下対象にはならない



● $K-H$ 波の一般的な特徴

- ① 水平波長はシアー層の厚さに比例 (約6倍)
- ② 位相速度はシアー層の中間における基本流速等しい
- ③ 振幅はシアー層から上下に離れるにつれて急速に減衰

3. 順圧不安定波の物理

- ・水平方向の運動場
- ・重力は無関係
- ・水平シアの不安定（鉛直渦）

$\left. \frac{d\bar{u}(y)}{dy} \right|_{y=y_1} = \left. \frac{d\bar{u}(y)}{dy} \right|_{y=y_2} = 0$, $\bar{u}(y)$ が定数でない場合、順圧不安定の条件を満たす

Michalke, 1964から

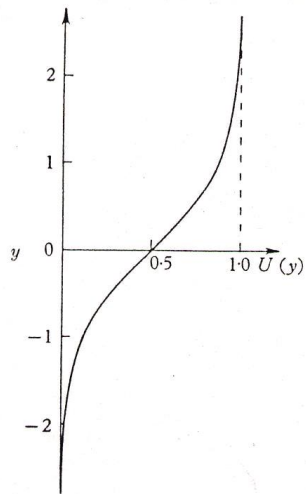


FIGURE 1. Hyperbolic-tangent velocity profile.

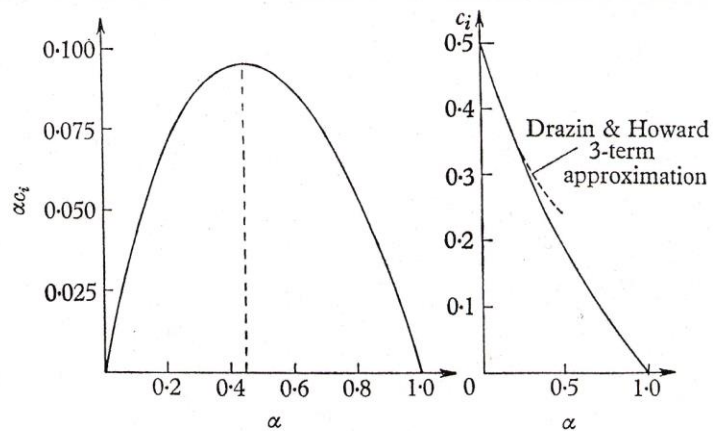
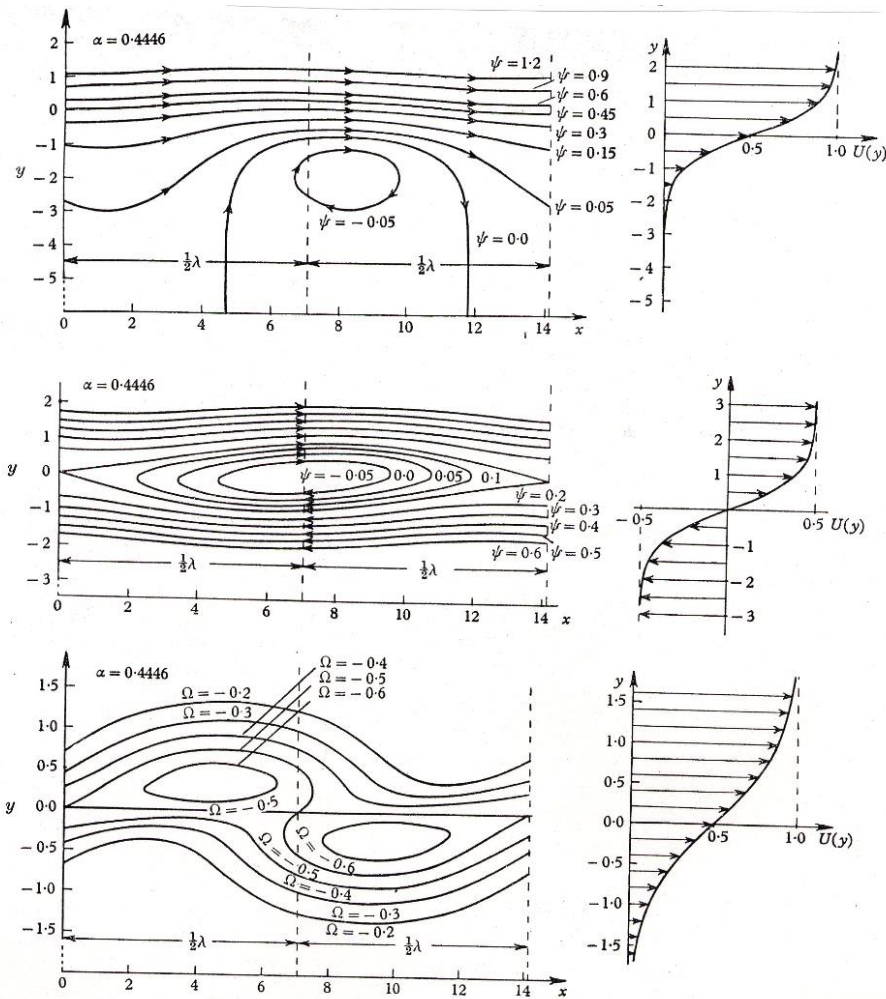
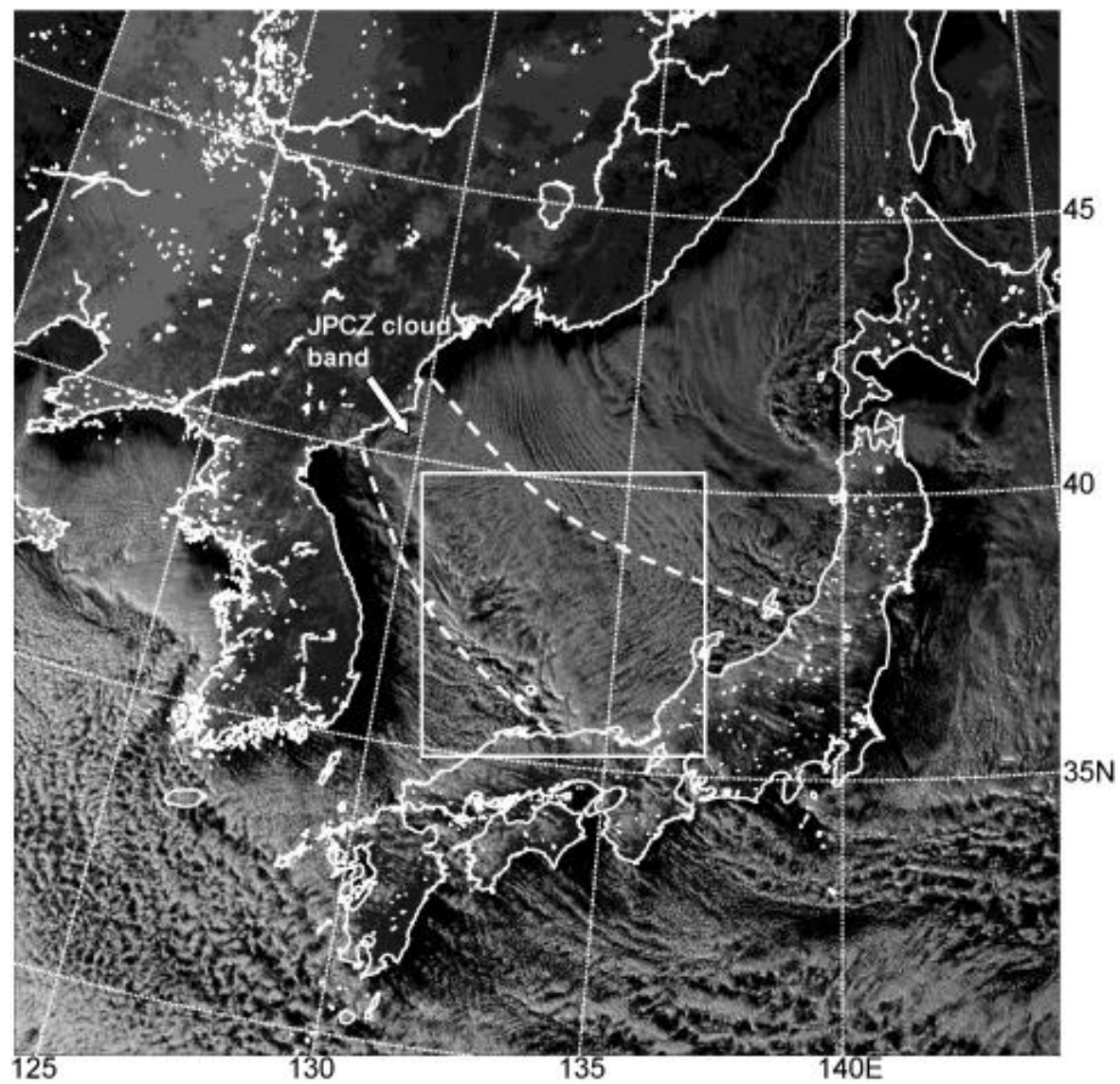


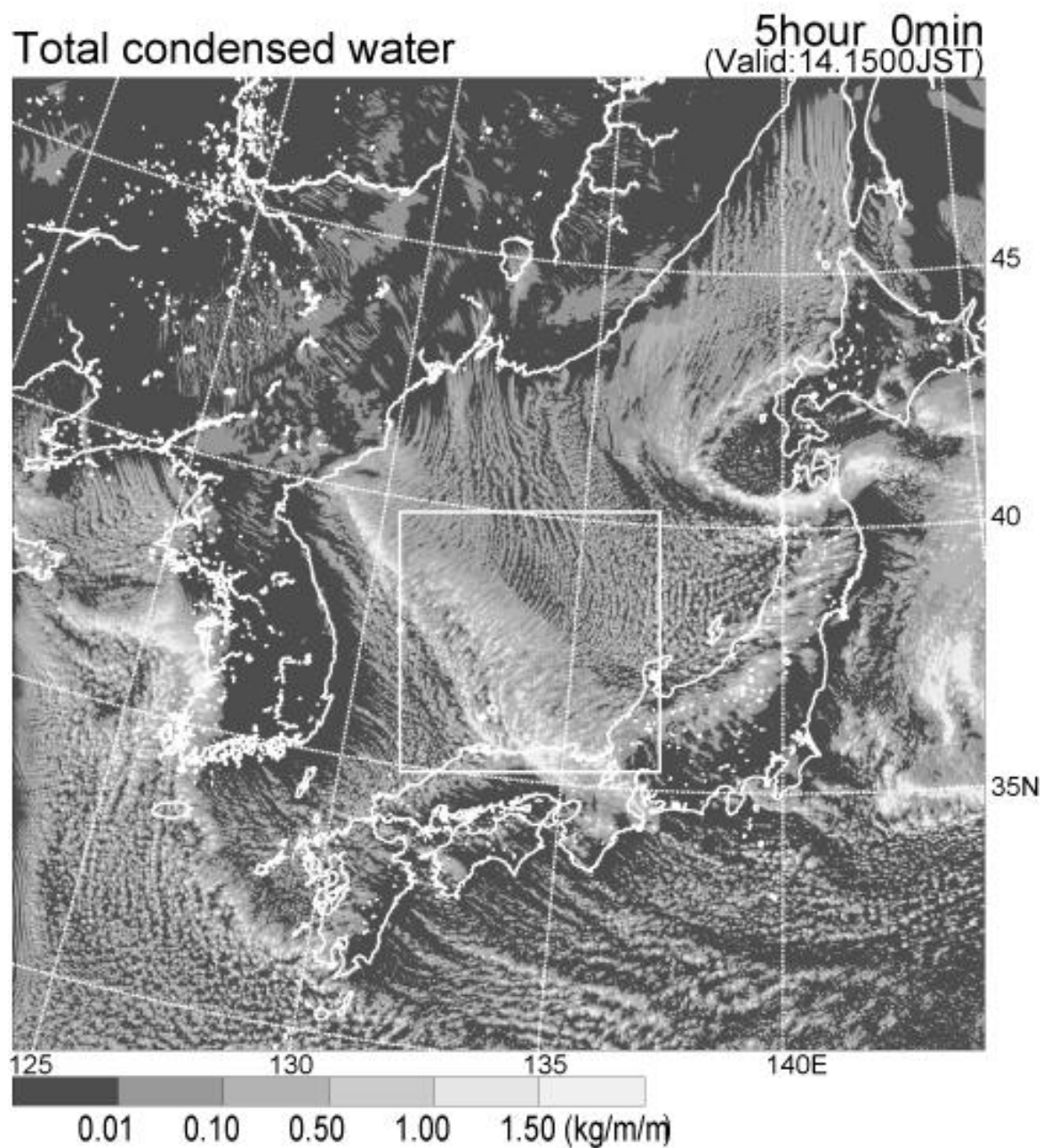
FIGURE 3. Eigenvalues c_i and growth rate αc_i vs wave-number α of the hyperbolic-tangent velocity profile.



実況



再現実験



○ 順圧不安定の例

日本海寒帯気団収束帯帯状雲に沿って発達するメソβスケールの渦列

(Nagata, 1993)

ζ, V at 950hPa, $P_{\text{sea level}}$

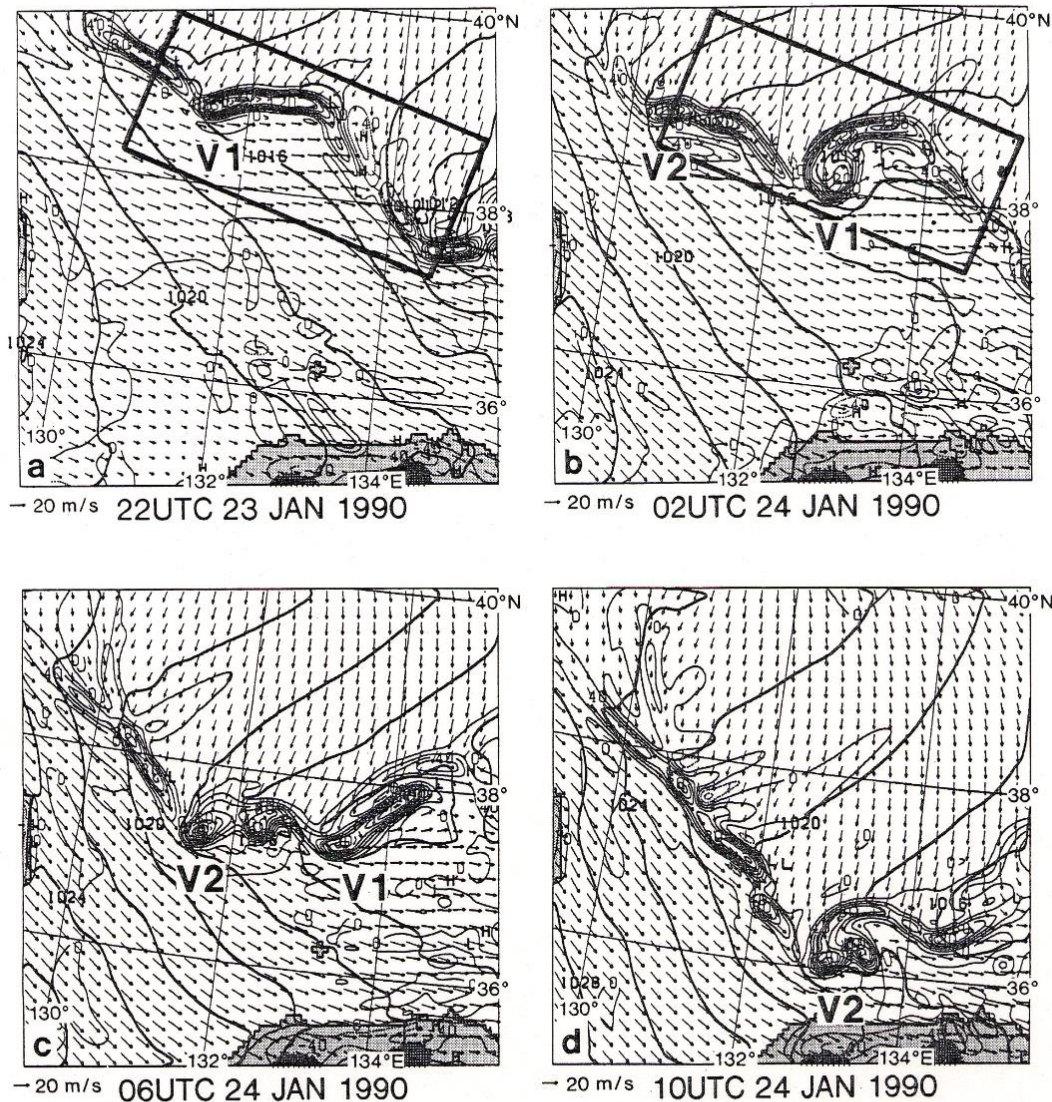


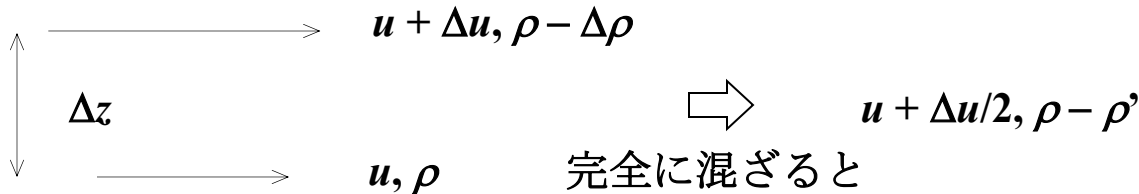
Fig. 5. Evolution of simulated vortices named V1 and V2, seen in 950-hPa relative vorticity field (thin lines, $\times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$). Contour intervals are $20 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, dashed lines denote negative values. Wind vectors at every three grid points on the same level and sea-level pressure (hPa) with 2-hPa contour intervals (thick lines) are also shown. Shading shows land areas. (a) $t = 22 \text{ h}$, valid at 22UTC 23, (b) $t = 26 \text{ h}$, valid at 02UTC 24, (c) $t = 30 \text{ h}$, valid at 06UTC 24, (d) $t = 34 \text{ h}$, valid at 10UTC 24 January 1990.

ケルビン・ヘルムホルツ（K-H）波

上下に風速差（シア）がある時に起こり得るシア不安定波

あまり（雲で）可視化されないので、Clear Air Turbulenceと呼ばれる

シアのある空気塊が完全に混ざる場合を考える



○ 運動エネルギーと位置エネルギーの保存

$$\left\{ (\rho - \Delta \rho) \frac{(u + \Delta u)^2}{2} + \rho \frac{u^2}{2} \right\} + (\rho - \Delta \rho) g \Delta z = (\rho - \rho') \left(u + \frac{\Delta u}{2} \right)^2 + (\rho - \rho') g \Delta z$$

○ 運動量の保存

$$(\rho - \Delta \rho) (u + \Delta u) = 2 (\rho - \rho') \left(u + \frac{\Delta u}{2} \right)$$

$$(\rho - \Delta \rho) \frac{\Delta u^2}{2} - \Delta \rho g \Delta z = \frac{1}{2} (\rho - \Delta \rho) \frac{\Delta u^2}{2} - \rho' g \Delta z$$

$$\longrightarrow (\rho - \Delta\rho) \frac{\Delta u^2}{4} - \Delta\rho g \Delta z = -\rho' g \Delta z < 0$$

場が安定である条件：上式の左辺が負であること

$$\rho \frac{\Delta u^2}{4} - g\Delta\rho\Delta z < 0 \rightarrow \text{Ri (リチャードソン数)} \equiv \frac{\frac{g}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} > \frac{1}{4}$$

場が不安定な条件：上式の左辺が正になってしまうとき

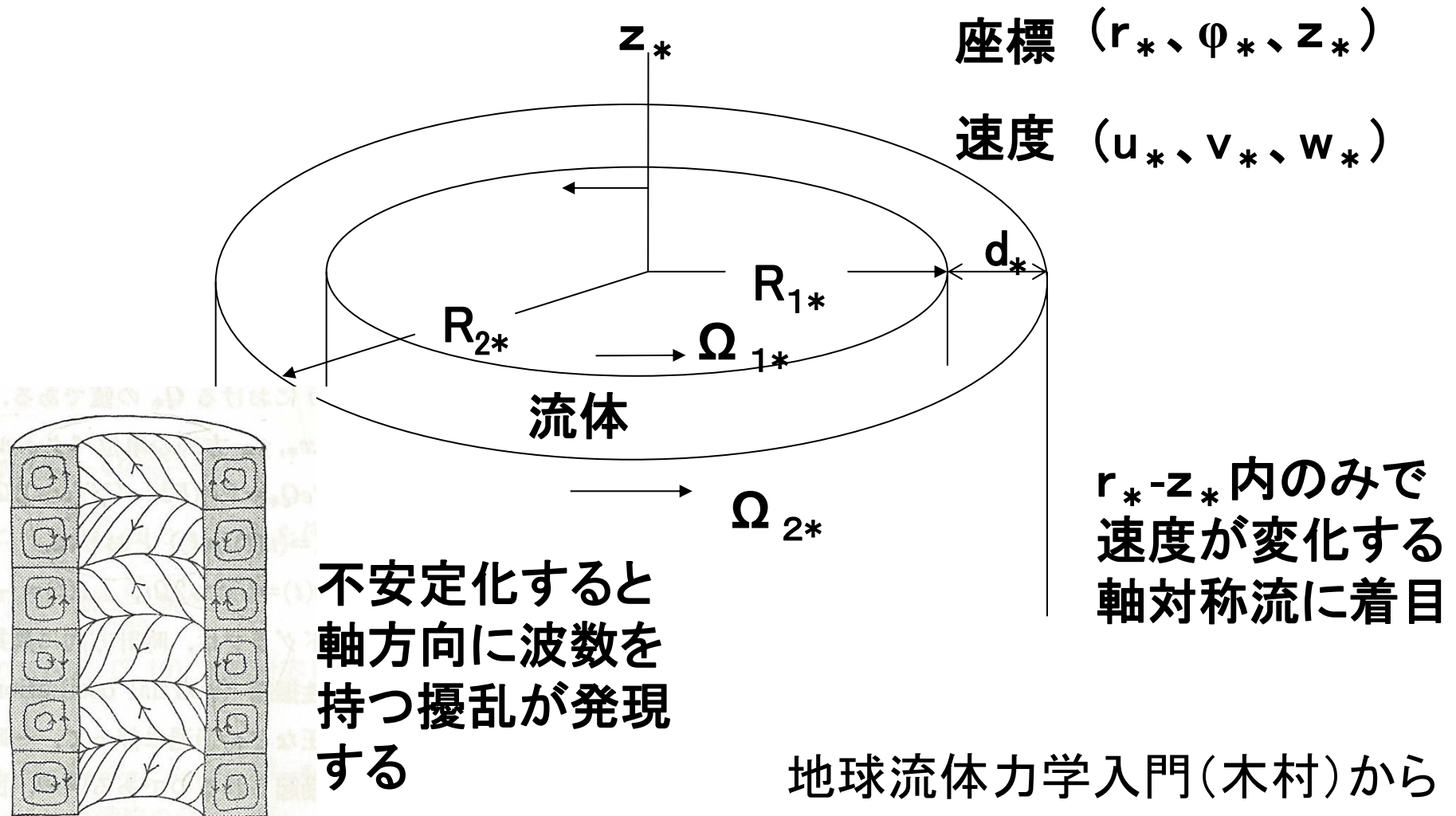
$$\text{Ri} = \frac{(\text{N}^2\text{:大気の静的安定度})}{(\text{鉛直シア})^2} < \frac{1}{4}$$

運動エネルギーとして保存できないエネルギーがK-Hを発生させる

例えば、 $\text{N}^2 = 10^{-4}$ (標準大気) の時、 $\Delta u > 20 \text{ m s}^{-1} \text{ km}^{-1}$

テラー渦とレーリー対流のアナロジー

回転系のplane Couette flow



支配方程式

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial u_*}{\partial r_*} + w_* \frac{\partial u_*}{\partial z_*} - \frac{v_*^2}{r_*} = -\frac{1}{\rho_{0*}} \frac{\partial p_*}{\partial r_*} + \nu_* \left(\nabla_*^2 u_* - \frac{u_*}{r_*^2} \right),$$

$$\frac{\partial v_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial v_*}{\partial r_*} + w_* \frac{\partial v_*}{\partial z_*} + \frac{u_* v_*}{r_*} = \nu_* \left(\nabla_*^2 v_* - \frac{v_*}{r_*^2} \right),$$

$$\frac{\partial w_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial w_*}{\partial r_*} + w_* \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = -\frac{1}{\rho_{0*}} \frac{\partial p_*}{\partial z_*} + \nu_* \nabla_*^2 w_*,$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial r_*} + \frac{u_*}{r_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0,$$

$$\text{where } \nabla_*^2 = \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} + \frac{\partial^2}{\partial z_*^2}.$$

$$\Gamma_{\Omega*} \equiv \frac{\Omega_{1*} R_{1*} - \Omega_{2*} R_{2*}}{d_*}$$

$$x_* \equiv r_* - R_{1*}$$

ここで、簡単のために、 $d_* \ll R_{1*}$ の場合を考える。

基本流 $v_{B*}(r_*)$ は次のようになる。(rotating Couette flow)

$$0 = \nu_* \left(\frac{\partial^2 v_{B*}}{\partial r_*^2} + \frac{1}{R_{1*}} \frac{\partial v_{B*}}{\partial r_*} - \frac{v_{B*}}{R_{1*}^2} \right) \Rightarrow v_{B*} = \Omega_{1*} R_{1*} - \Gamma_{\Omega*} x_*$$

Rotating Couette flowの線型論

この不安定を慣性不安定 (inertial instability) と呼ぶ

$$-\frac{v_{B*}^2}{r_*} = -\frac{1}{\rho_{0*}} \frac{\partial p_{B*}}{\partial r_*} \quad \text{を利用して、}$$

$$\frac{\partial u'_*}{\partial t_*} - 2\Omega_{1*} v'_* = -\frac{1}{\rho_{0*}} \frac{\partial p'_*}{\partial r_*} + \nu_* \left(\frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} \right) u'_*,$$

$$\frac{\partial v'_*}{\partial t_*} - (\Gamma_{\Omega*} - \Omega_{1*}) u'_* = \nu_* \left(\frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} \right) v'_*,$$

$$\frac{\partial w'_*}{\partial t_*} = -\frac{1}{\rho_{0*}} \frac{\partial p'_*}{\partial z_*} + \nu_* \left(\frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} \right) w'_*,$$

$$\frac{\partial u'_*}{\partial r_*} + \frac{\partial w'_*}{\partial z_*} = 0.$$

と書ける.
ただし、 $R_{1*} \rightarrow \infty$ とした時、無限小になる項は無視した.

ここで、 $x_* \rightarrow z_*$, $z_* \rightarrow x_*$, $u'_* \rightarrow w'_*$, $w'_* \rightarrow u'_*$, $v'_* \rightarrow \theta'_*$ とする。
 また、 $2\Omega_{1*} \rightarrow \alpha g$, $\Gamma_{\Omega*} - \Omega_{1*} \rightarrow \Delta T_*/h_*$, $Pr=1$ とすることによって、
 Rotating Couette flow の不安定問題と Rayleigh 対流の不安定問題 (2次元) は全く一致する。

Rayleigh 対流の不安定の臨界値: $Ra = \frac{g\Delta T h^3}{T_0 \kappa \nu}$

Rotating Couette flow の不安定の臨界値: $\frac{2\Omega_1(\Gamma_\Omega - \Omega_1)d^4}{\nu^2} \equiv Ta$
 (臨界 Taylor 数)
 ~ 1708

慣性不安定は v_{B*} に働く遠心力が原因で生じる。擾乱は円筒の内側ほど遠心力が大きい時に発達する。

回転流体と密度成層流体との類似性

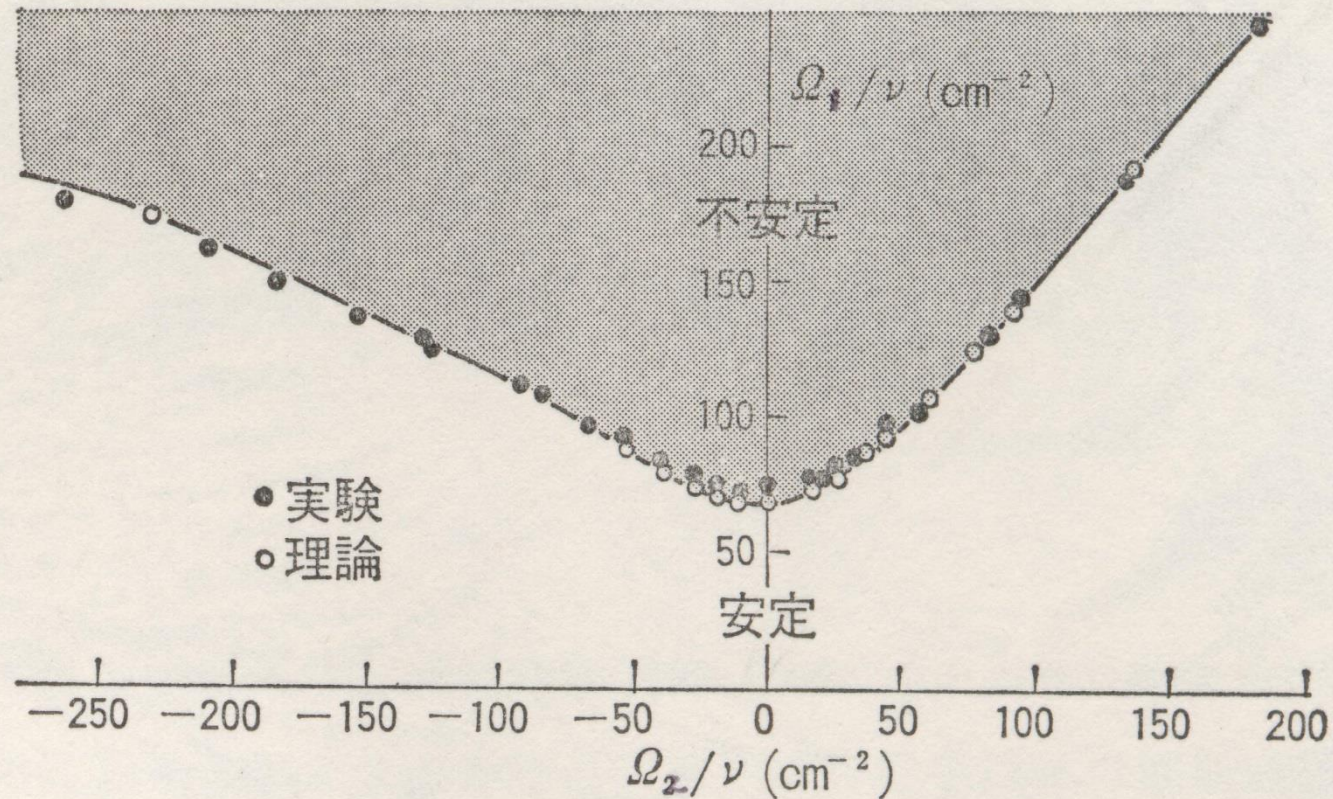


図 10.5 内側の円筒の角速度 Ω_1 と外側の円筒の角速度 Ω_2 の関数として示した慣性不安定の範囲 (影をつけた部分). 実験は $R_1=3.55 \text{ cm}$, $R_2=4.035 \text{ cm}$ の容器で行なわれた (テラー <Taylor>, 1923).

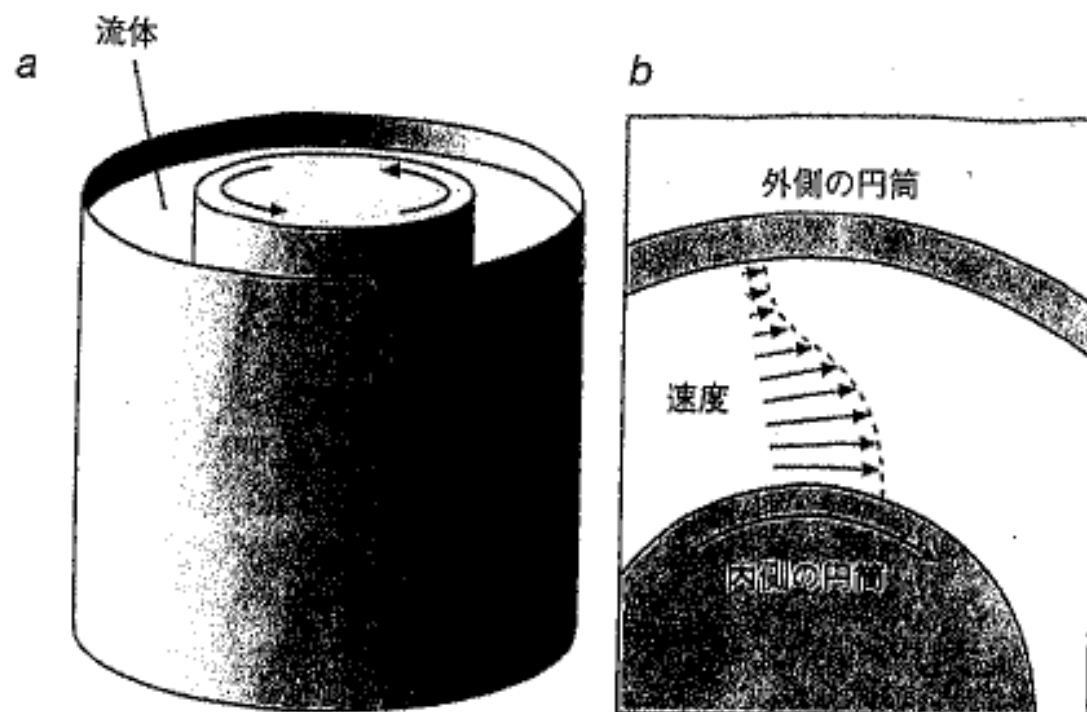


図 6.3 モーリス・クエットが考案した装置では、2つの同心円の円筒状ドラムのあいだに流体が入れられ、内側のドラムの回転によって動かされる (a)。ジェフリー・テイラーがこの装置を改良し、外側のドラムも場合によっては回転できるようにした。流体は内側の円筒との境界面に生じる摩擦により抵抗を受けるため、速度の異なる一連の同心円の殻の中を動いているような流れとなる。つまり剪断流である (b)。

●K-H波の線形理論

■用いる仮定

- 2次元(x, z)、断熱、非粘性
- 静止している状態を基本状態として, これがほんの少し摂動を受けたとする.
- 基本状態は $\bar{\chi}$, 擾乱は χ' の記号で表す ($\bar{\chi} \gg \chi'$)

$$\Rightarrow \hat{u} = \bar{u}(z) + u', \hat{w} = w', \hat{\theta} = \bar{\theta}(z) + \theta', \hat{\Pi} = \bar{\Pi}(z) + \Pi', \hat{\rho} = \bar{\rho}(z) + \rho'$$

■線形化

- 上記仮定を非弾性流体の支配方程式系に適用
- ダッシュのついた量は小さいから, その二乗の項はすべて省略

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + w' \frac{d\bar{u}}{dz} &= -C_p \Theta \frac{\partial \Pi'}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) w' &= -C_p \Theta \frac{\partial \Pi'}{\partial z} + g \frac{\theta'}{\Theta} \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \theta' + \frac{\Theta}{g} N^2 w' &= 0 \end{aligned} \right\}$$



← u', Π', θ' を消去して w' だけの式にする

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-\frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} \right) \frac{\partial w'}{\partial x} + N^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0$$

■波型の解を求める

- ①波型の解を仮定する
- ②支配方程式から波の特性(波数と振動数の関係(分散関係))を求める

仮定する波型解

$$w' = W(z) \exp[i(kx - \omega t)] = W(z) \exp[ik(x - ct)]$$

$W(z)$: 波の振幅, k : x 方向の波数,
 c : 位相速度, ω : 振動数
 (z 方向には波型を仮定していない)

支配方程式

↓

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(- \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} \right) \frac{\partial w'}{\partial x} + N^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 W}{dz^2} + \left(\frac{N^2}{(\bar{u} - c)^2} - \frac{1}{(\bar{u} - c)} \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} - k^2 \right) W = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 W}{dz^2} + (l^2 - k^2) W = 0$$

$$l^2(z) = \frac{N^2}{(\bar{u} - c)^2} - \frac{1}{(\bar{u} - c)} \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2}$$

l^2 : スコラー数

$W(z)$ を決定する式テイラー・ゴールドストーン方程式

⇒ 密度成層した(鉛直シア一流の振る舞いを記述する式

⇒ 山岳波の時と式の形同じ

●中立波と不安定波

- ・中立波: ある復元力によって振動。振幅はほぼ一定。
- ・不安定波: 場の不安定を解消するときが発生。振幅は時間とともに増大

波の位相速度は一般には複素数

$$\Rightarrow c = c_r + ic_i$$

$\Rightarrow c_i$ の符号によって波の性質が異なる

$$w' = W(z) \exp[ik(x - ct)] = W(z) \exp[ik(x - (c_r + ic_i)t)]$$

$$\begin{cases} (a) c_i = 0 \text{ のとき} & w' = W(z) \exp[ik(x - c_r t)] \\ (b) c_i > 0 \text{ のとき} & w' = W(z) \exp(kc_i t) \exp[ik(x - c_r t)] \\ (c) c_i < 0 \text{ のとき} & w' = W(z) \exp(-kc_i t) \exp[ik(x - c_r t)] \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} (a) \text{時間経っても振幅は一定} \Rightarrow \text{中立波 (内部重力波や山岳波など)} \\ (b) \text{時間とともに振幅増大} (\exp(kc_i t) \text{ のため}) \Rightarrow \text{不安定波} \\ (c) \text{時間とともに振幅減少} (\exp(-kc_i t) \text{ のため}) \Rightarrow \text{減衰する波} \end{cases}$

テイラー・ゴールドス タイン方程式の解法

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left(\frac{N^2}{(\bar{u} - c)^2} - \frac{1}{(\bar{u} - c)} \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} - k^2 \right) W = 0$$

上記の式を解くには、

- ① 基本場が決める $\bar{u}, N$ とを与えて
- ② 波のパラメータ k, c の組を適当に与えながら
- ③ 境界条件を満足する W を求める

山岳波の場合

- ① k は山の形として既に与え
- ② c は $c = 0$ として固定していた

シア不安定に関する話題

(1) 大気の安定度と鉛直シア:

K-H波 (Clear Air Turbulence)

(2) 水平シア:

順圧不安定

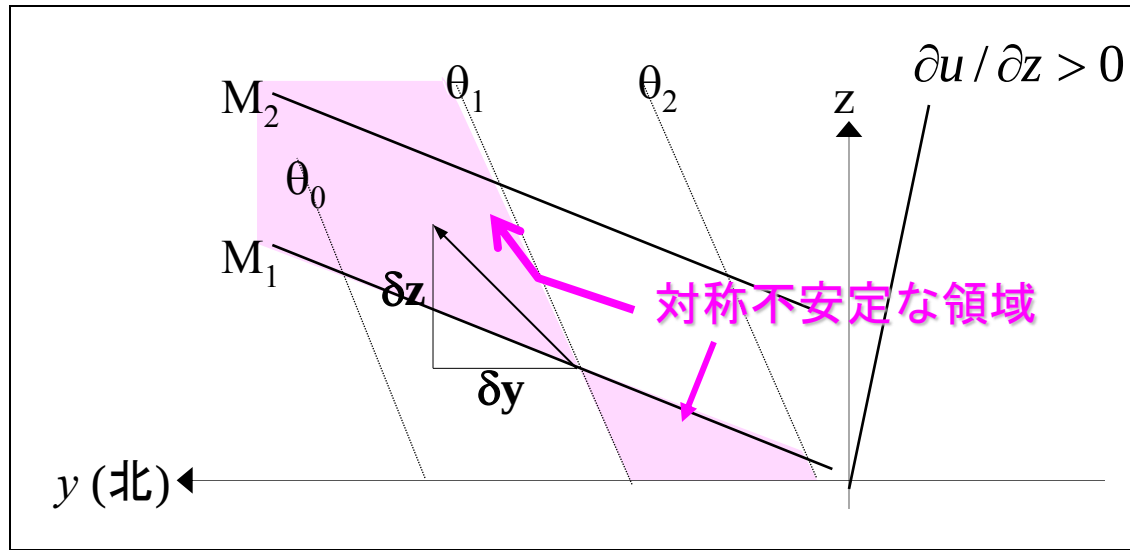
(3) 回転流体と密度成層流体の類似性

レーリー対流とテラー渦

(4) 大気の安定度と水平、鉛直シア:

慣性不安定、対称不安定、条件付対称不安定

対称不安定



(温度風の関係より)

$$\theta_0 < \theta_1 < \theta_2$$

(絶対運動量保存より)

$$M_1 < M_2$$

○ x方向運動方程式

$$\frac{du}{dt} = fv = f \frac{dv}{dt} \quad \frac{dM}{dt} = 0 \quad \text{ここで、} M(\text{絶対運動量}) = u - fy$$

○ y方向の運動方程式

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - fu = f(\bar{u} - u) = f(\bar{M} - M)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \delta y}{dt^2} = f(\bar{u}_0 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \delta z - \bar{u}_0 - f \delta y) = -f(\bar{\zeta}_a \delta y - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \delta z)$$

$$\text{ここで、} \bar{\zeta}_a (\text{絶対渦度}) = f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{M}}{\partial y}$$

○ z 方向の運動方程式

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{g}{\theta_0}(\bar{\theta} - \theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\delta z}{d^2t} = -\frac{g}{\theta_0} \left\{ \bar{\theta} - \left(\bar{\theta} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\theta}{\partial z}\delta z \right) \right\} = f \frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\delta y - N^2\delta z$$

ここで、 $\bar{u}$ は温度風の関係 $f \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} = -\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}$ を満たす

● 水平運動 ($\delta z = 0$) の場合

$$\frac{d^2\delta y}{d^2t} = -f\bar{\zeta}_a\delta y$$

$\Leftrightarrow \bar{\zeta}_a > 0$: 慣性安定、 $=0$: 慣性中立、 <0 : 慣性不安定

● 慣性安定 ($\bar{\zeta}_a > 0$)、静的安定 ($N^2 > 0$) の場合

y・z方向の運動方程式より δy を除去すると

$$\frac{d^4\delta z}{d^4t} + (N^2 + f\bar{\zeta}_a)\frac{d^2\delta z}{d^2t} + \left\{ f\bar{\zeta}_aN^2 - f^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\}\delta z = 0$$

不安定である条件は δz が $\exp(\sigma t)$ ($\sigma^2 > 0$)の形の解を持つことである。

$$\Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{2} \left\{ -(N^2 + f\bar{\zeta}_a) \pm \sqrt{(N^2 - f\bar{\zeta}_a)^2 + 4f^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} \right\} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{\zeta}_a}{f} \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} = \frac{\bar{\zeta}_a}{f} Ri = \left(1 - \frac{1}{f} \frac{\partial u}{\partial y} \right) Ri = \frac{\left(\delta z / \delta y \right)_{\bar{M}}}{\left(\delta z / \delta y \right)_{\bar{\theta}}} < 1$$

➡ 対称（斜向）不安定

●対称不安定が起こりえる状況

対称不安定波の時間スケール $\sim f^{-1} \sim 10^4$ （数時間）

$\Leftrightarrow$ 水平スケール $\sim (gH)^{1/2}/f \sim 10^6 \text{ m} = 1,000 \text{ km}$

南北水平シア $= 10 \sim 50 \text{ m s}^{-1}/10^6 \text{ m} = 1 \sim 5 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

$$\Rightarrow \frac{\bar{\zeta}_a}{f} = 1 - \frac{1}{f} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.5 \sim 0.9 \quad \Rightarrow Ri = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} < 1.1 \sim 2.0$$

鉛直シア $\sim 25 \text{ m s}^{-1}/5 \text{ km}$ $N^2 < 0.3 \sim 0.5 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

（水平シア・鉛直シアが相当大きくても大気の安定度が標準大気より1/2以下であることが必要）

条件付対称不安定 (CSI)

対称不安定が起こりえる状況：静的安定度がかなり小さいことが必要
 湿潤大気中の静的安定度は飽和相当温位 (θ_e^*) で定義される

- ・ 静的安定度は湿潤大気中の方が乾燥大気中より一般的に小さい

$$\text{CSIの条件: } \frac{\bar{\zeta}_a}{f} Ri_m = \frac{(\delta z / \delta y) \bar{M}}{(\delta z / \delta y)_{\theta_e^*}} < 1$$

$$\text{ここで、} Ri_m = \frac{N_m^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}$$

$$N_m^2 (\text{湿潤Brunt-Vaisala}) = g \frac{d \ln \theta_e^*}{dz}$$

●メソスケールの降水帯がCSIに起因するかどうかの条件 (Selter *et al.*, 1985)

- ・ 大気状態はほぼ2次元：降水帯に平行な方向の変位が小さい
- ・ CSIの条件を満たす領域がある
- ・ 降水帯は温度風の方角
- ・ CSIに伴う擾乱の移動速度は基本場のそれと同じである

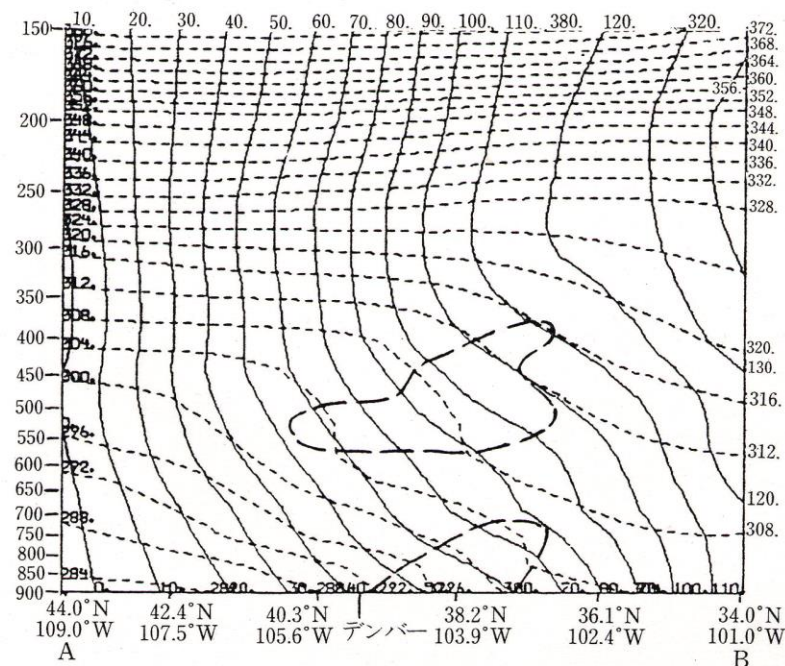


図 5.3 降雪帯に直交する方向の鉛直断面内における絶対地衡風運動量 (M , 実線) と相当温位 (θ_e , 破線) の等値線 (Moore and Lambert, 1993)

1991年1月20日0000世界時。太い破線がCSIの領域を示す。横軸に断面に沿う点の緯度・経度が記してある。A点のそれは44.0°N, 109.0°Wで、B点のそれは34.0°N, 101.0°W。

順圧不安定

○二元元(x,y)の渦度方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right)(\zeta + f) = 0$$

○x方向に基本流 $\bar{u}(y)$ がある場合を考える

$$u = \bar{u}(y) + u'(x,y,t), \quad v = v'(x,y,t), \quad u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial \phi'}{\partial x}, \quad \zeta' = \nabla^2 \phi'$$

渦度方程式に代入し、線形化する

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \phi' + \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}\right) \frac{\partial \phi'}{\partial x} = 0$$

x方向に伝播する波動解を考える

$$\phi'(x,y,t) = \phi(y) e^{ik(x-ct)} = (\phi_r + i \phi_i) e^{kcit} e^{ik(x-ct)} \Rightarrow (\bar{u} - c) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - k^2 \phi\right) + \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}\right) \phi = 0$$

$c_i > 0$ になることが ϕ' が不安定になるため条件である。

$$\Leftrightarrow y = y_1, y_2 \text{ で } \phi = 0 \text{ の場合、 } \beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \text{ (絶対渦度の } y \text{ 微分)}$$

が $[y_1, y_2]$ の領域で符号が変わること

まず $c_i \neq 0$ と仮定する. したがって $\bar{u} - c \neq 0$ である. 前ページの式の両辺を $\bar{u} - c$ で除して、

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - \left(k^2 - \frac{\beta - d^2\bar{u}/dy^2}{\bar{u} - c} \right) \psi = 0 \quad (1)$$

$(\bar{u} - c)^{-1}$ は複素数であり、その実数部分と虚数部分は、

$$\begin{aligned} \delta_r &= (\bar{u} - c_r)[(\bar{u} - c_r)^2 + c_i^2]^{-1} \\ \delta_i &= c_i[(\bar{u} - c_r)^2 + c_i^2]^{-1} \end{aligned}$$

である. 式(1)を実数部分と虚数部分に分けると、

$$\frac{d^2\psi_r}{dy^2} - \left[k^2 - \left(\beta - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right) \delta_r \right] \psi_r - \left(\beta - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right) \delta_i \psi_i = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2\psi_i}{dy^2} - \left[k^2 - \left(\beta - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right) \delta_r \right] \psi_i + \left(\beta - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right) \delta_i \psi_r = 0 \quad (3)$$

式(2)に ϕ_i をかけ、式(3)に ϕ_r をかけて、辺々引き算すると、

$$\frac{d}{dy} \left(\psi_i \frac{d\psi_r}{dy} - \psi_r \frac{d\psi_i}{dy} \right) = \left(\beta - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right) \delta_i (\psi_r^2 + \psi_i^2) \quad (4)$$

が得られる. これを y について積分し、 $y = y_1$ と y_2 で $\psi_i = \psi_r = 0$ という境界条件を使うと、

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} \frac{(\beta - d^2\bar{u}/dy^2)}{|\bar{u} - c|^2} |\psi|^2 dy = 0 \quad (5)$$