

## 「総観気象学」のシラバス(修正)

(第1回)日本の四季と気圧配置

(第2回)大気運動の全体像

(第3回)大気の運動方程式の導出

(第4回)気圧系の運動方程式の導出とスケール解析

(第5回)コリオリ力

(第6回)地衡風・温度風・渦位

(第7回)温帯低気圧(傾圧不安定波)

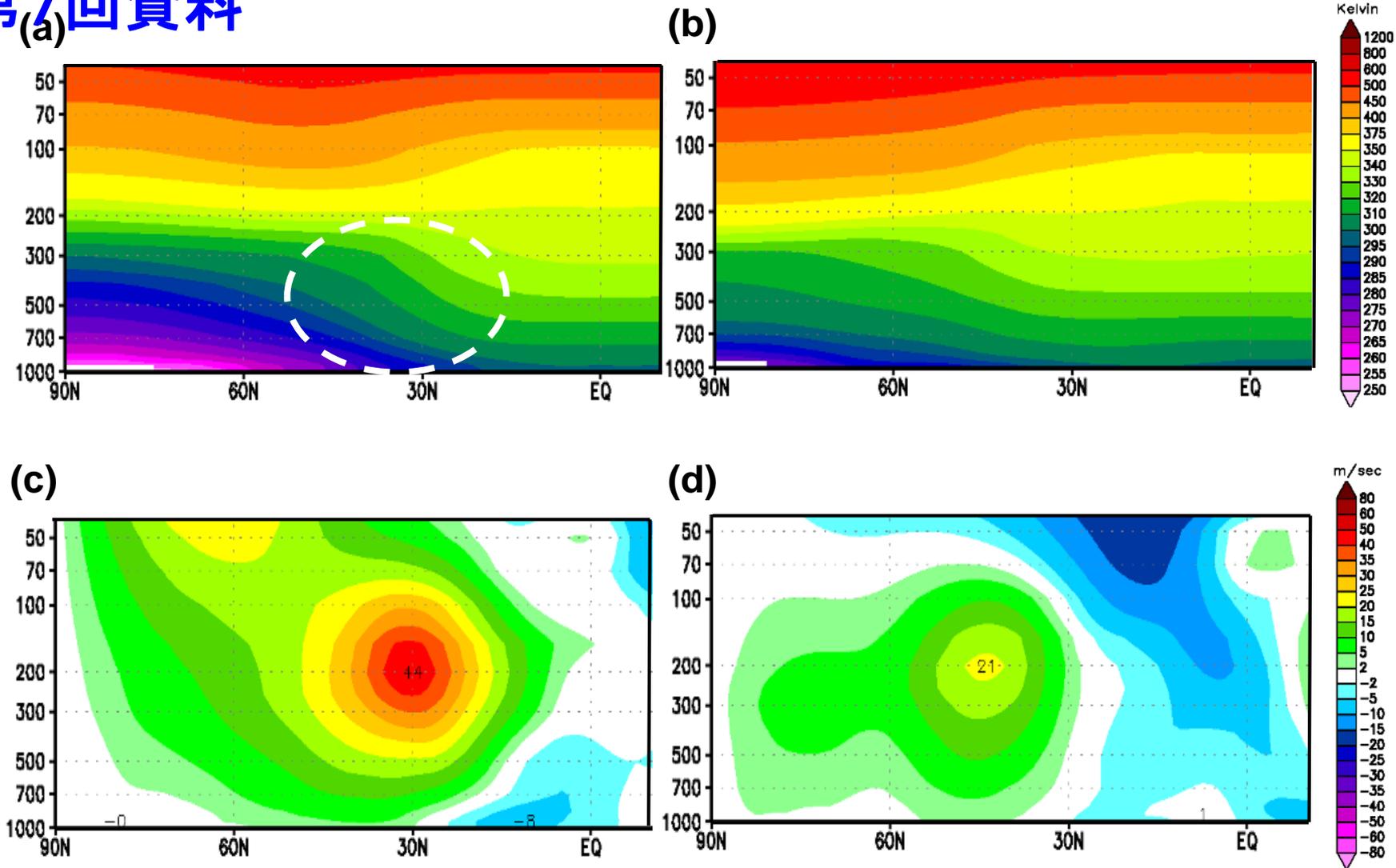
(第8回)乾燥対流

(第9回)湿潤対流

(第10回)メソ対流系

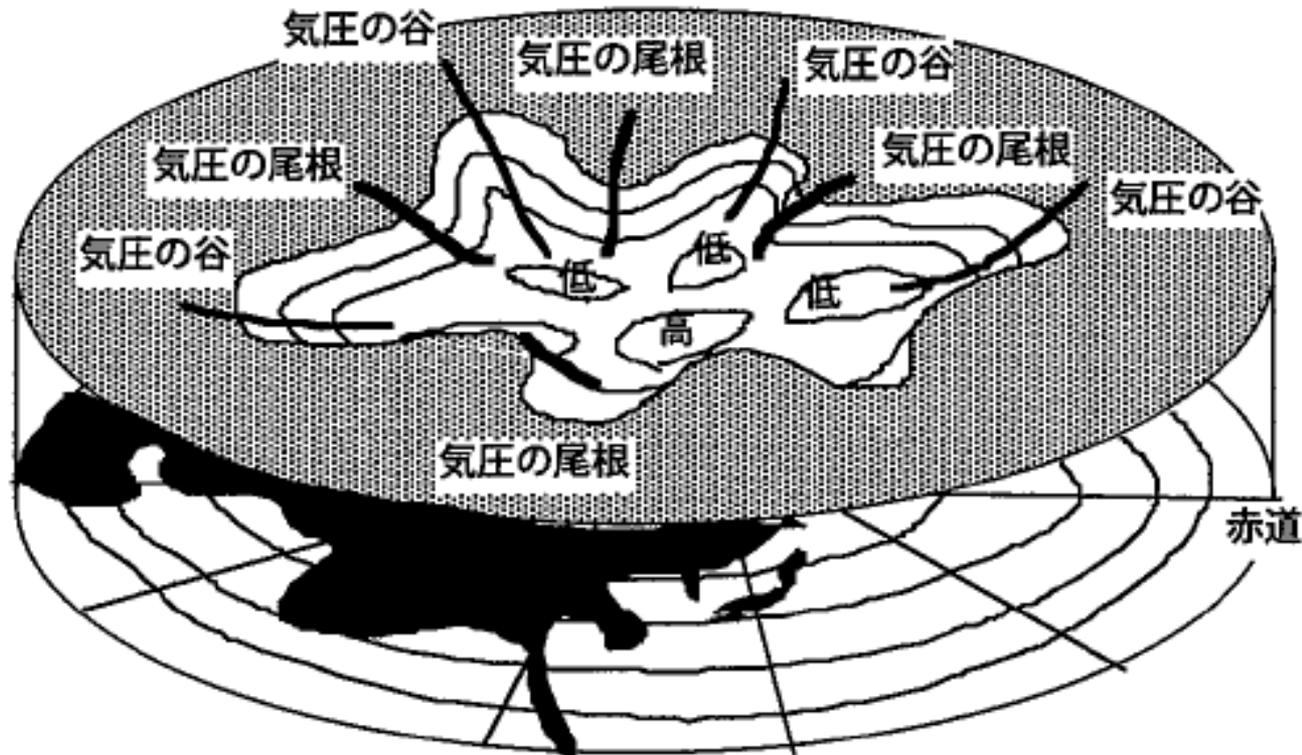
\* 講義の進行の都合により、テーマがずれることがある。

# 第7回資料

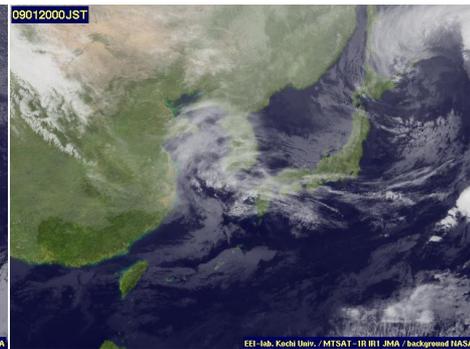
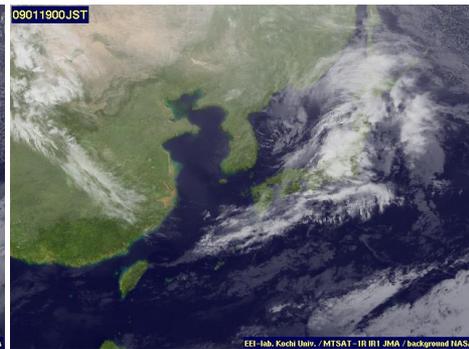
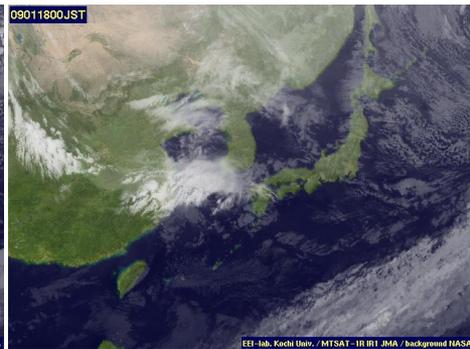
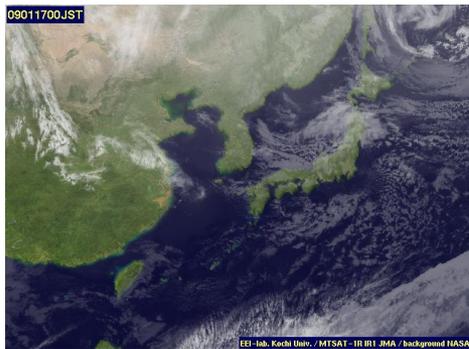


1月と7月の東西平均した温位と東西風の南北-気圧分布 (JRA-25、気象庁・(財)電力中央研究所)。(a)と(b)は温位、(c)と(d)は東西風。(a)と(c)は1月、(b)と(d)は7月。白丸は北半球の対流圏中緯度帯を示す。

## 北半球の500hPa(対流圏中層)の等圧面の分布 (木村、ジュニア新書から)



\* デカルト系(x、y、z)よりも気圧系(x、y、p)の方が記述しやすい

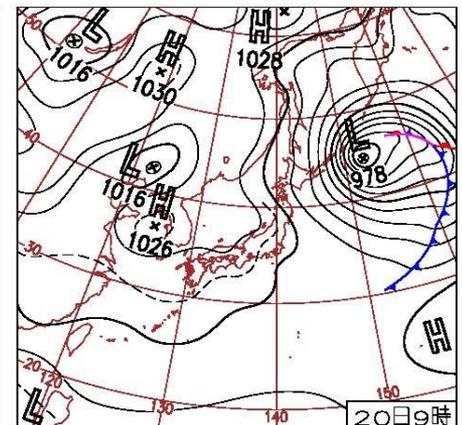
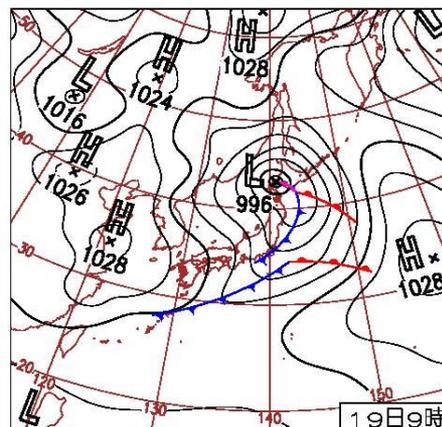
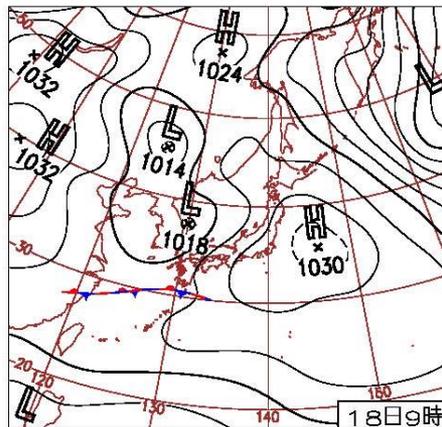
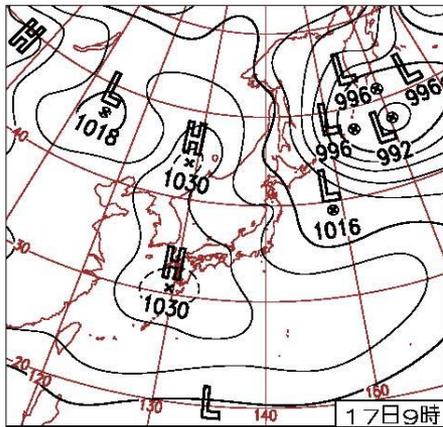


2009年1月17日9時

2009年1月18日9時

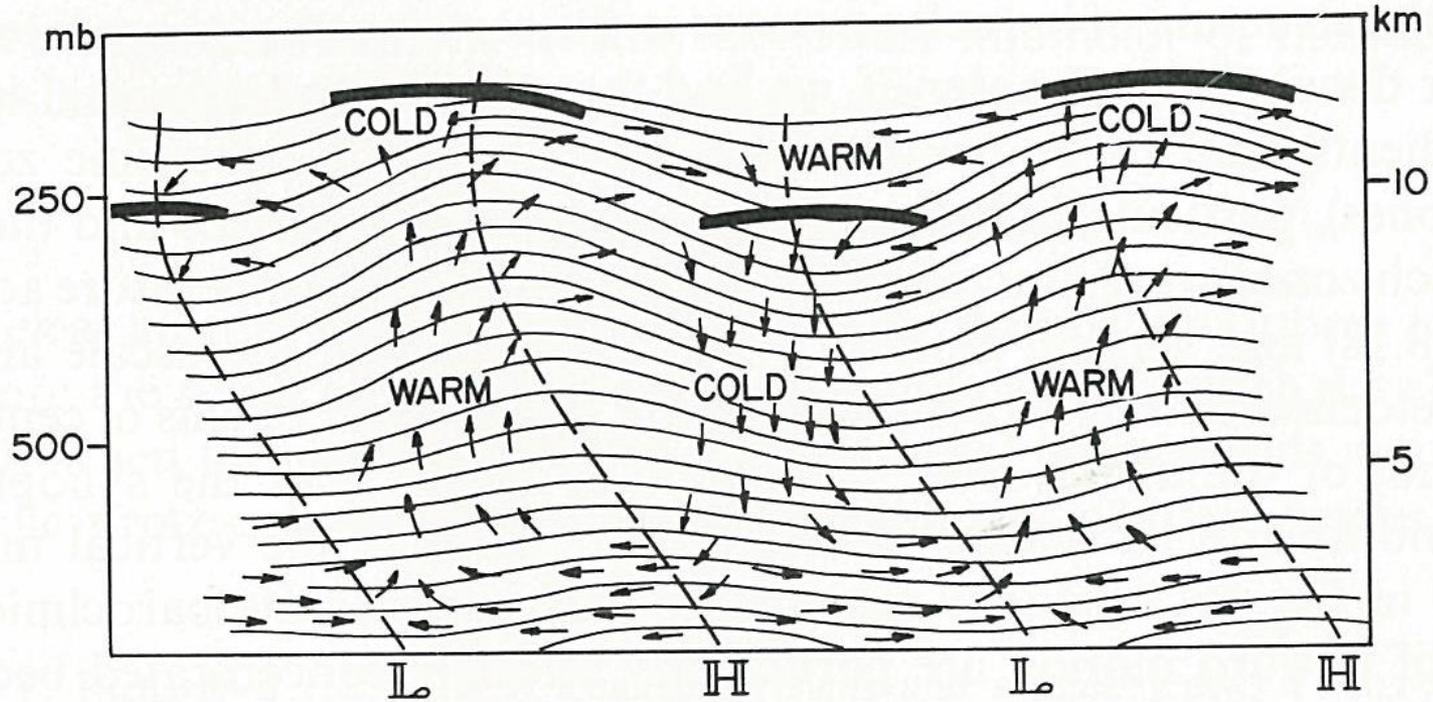
2009年1月19日9時

2009年1月20日9時



2009年1月17日から20日までの1日ごとの衛星写真(高知大学)と地上天気図(気象庁)。1000kmスケールの高・低気圧の擾乱が西から移動するのが見られる

## 温帯低気圧の発達 (x、z)



低気圧は、トラフの前面で南風、暖気の流入があり、鉛直方向に軸が西に傾いているときに、発達する。

## 疑問

Q1. 上空にゆくほど西風が強くなっているのは？  
また日本上空で西風ジェットが強いわけ？

Q2. 風と高度場の関係を見ると、風向が等高度線にほぼ平行であるのはなぜだろうか？

Q3. 1000km程度の東西波数の擾乱が見られるのはどうしてか？

1. デカルト系の方程式系からp系(気圧系)の方程式系を導出する
2. 準地衡風方程式を導出する
3. 1000km程度の東西波数をもつ傾圧不安定波がもっとも不安定であることを示す

# 温度風

$$\left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \right) -f \bar{u} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$$

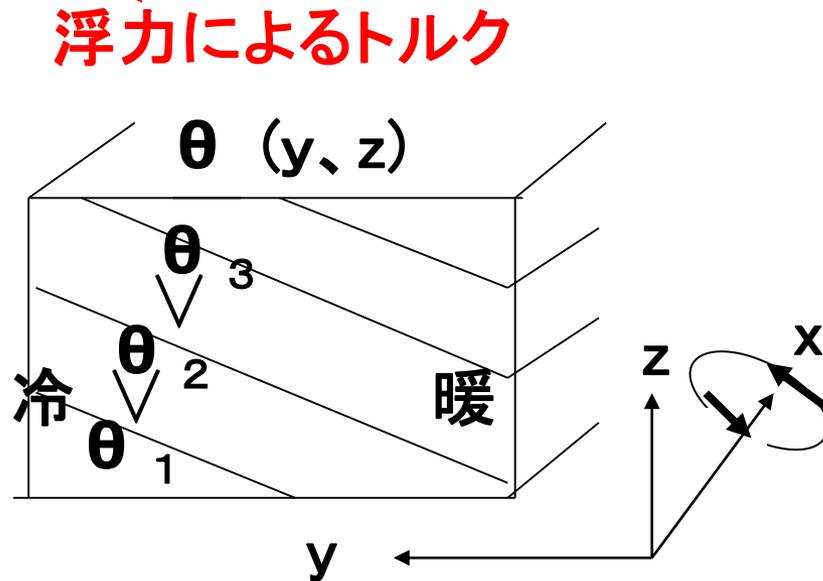
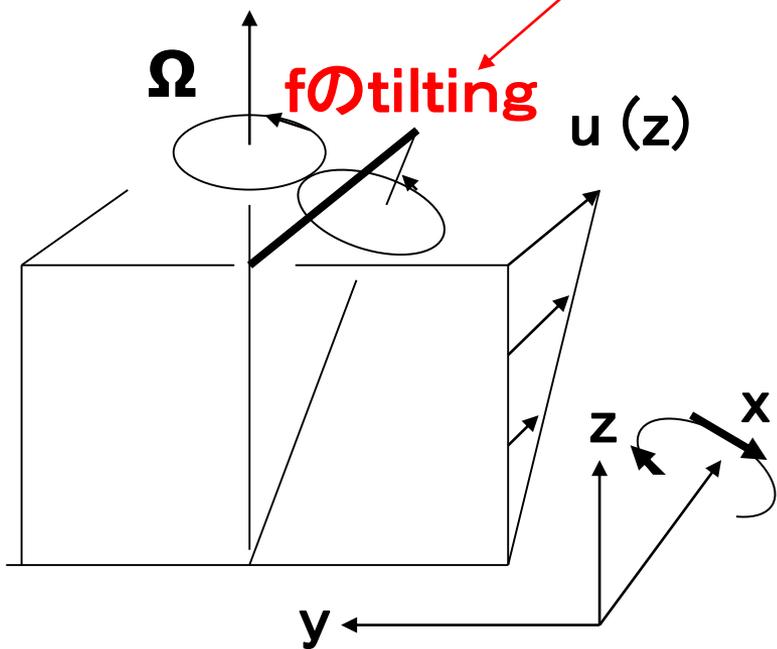
地衡風

$$\left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \right) -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} = 0$$

静水圧

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = f \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = 0$$

温度風 ⇒ Q1の回答



$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + f v - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - f u - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (4)$$

$\phi$  はジオポテンシャル (= gz)、 $\alpha$ は比容。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = -u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \frac{\omega}{p} \left[ \frac{\partial}{\partial p} \left( p \frac{\partial \phi}{\partial p} - \kappa \phi \right) \right] = 0 \quad (5)$$

where  $\kappa = R/c_p \approx 2/7$ .

プリミティブ (primitive) と呼ぶ理由: 数値予報の発達の歴史的背景がある。1950年代に数値予報が基礎となった時代は、静水圧近似に加えて地衡風近似が用いられた。その後、コンピュータや数値計算技術などの進歩により、地衡風近似は用いずに静水圧近似だけを使い、元の圧縮性流体の運動方程式系に近い方程式形に戻ったという意味がある。(小倉、総観気象学入門より)

- ナビエ・ストークスの方程式は、音波、重力波、表面波、ロスビー波など、微小なスケールから宇宙スケールまでの流体の運動を記述するので、さまざまな運動を含みうる。
- その中で特定の周期で特定の長さの擾乱を見出すには、その擾乱を支配する力を抽出する必要がある。それに対して、それ以外のものはノイズであり不要である。つまり、みそもクソもある中から、みそだけを取り出す手法が必要となる。
- みそだけを取り出すテクニックとは？

## 「準地衡風の世界」

- 中緯度の総観規模の高・低気圧を抽出する
- ・ 擾乱の特徴的な水平スケール  $L \sim 1000 \text{ km} \sim 10^6 \text{ m}$
- ・ 擾乱の代表的な風速  $U \sim 10 \text{ m s}^{-1}$
- ・ 擾乱の代表的な時間スケール  $T \sim L/U \sim 10^5 \text{ s}$
- ・ P座標系における鉛直スケール  $D_p \sim 10^3 \text{ hPa}$   
 $= 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$

$$U \approx 10 \text{ m s}^{-1}, f \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{1}{L} \approx 10^{-6} \text{ m}^{-1}, \frac{\partial}{\partial p} \approx \frac{1}{D_p} \approx 10^{-3} \text{ hPa}^{-1}$$

$$u \frac{\partial}{\partial x} \approx v \frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{U}{L} \approx 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \frac{\partial}{\partial t} \approx \frac{U}{L} \approx 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$\omega \approx \frac{UD_p}{L} \approx 10^{-2} \text{ hPa s}^{-1},$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}, \omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \approx \frac{U^2}{L} \approx 10^{-4} \text{ ms}^{-2}$$

$$\vec{k} \times f \vec{v} \approx fU \approx 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$$

運動方程式において、  
 水平加速度とコリオリ力の  
 大きさの比は

$$\epsilon_* = U/fL \approx 10^{-1}$$

コリオリパラメータ  $f$  は  $f_0 (=2\Omega \sin\varphi_0) + \beta y$  で表されるとする。これから代表的な量を用いてスケーリングして、方程式系を無次元化する。このとき、三つの無次元量(\*つき)がでてくる。

$$\varepsilon_* = \frac{U}{f_0 L}, \quad \beta_* = \frac{L \cot \varphi_0}{a \varepsilon},$$

$$Ri_* = p \frac{d}{d p} \left( p \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \kappa \Phi \right) \frac{1}{U^2} = - \frac{p^2 \bar{\alpha}}{U^2} \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial p}$$

$a$  は地球の半径、 $L/a \sim 10^{-1}$  の程度、 $Ri$  はリチャードソン数と呼ばれ、その値は地表付近で約80、圏界面あたりで約65、成層圏では約200くらいであるので、対流圏では  $Ri$  は100ぐらいの定数と考える。つまり、

$$\varepsilon_* = 10^{-1}, \quad \beta_* = 1, \quad Ri_* = 10^2$$

とおく。

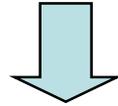
$$x_* = x/L, y_* = y/L, p_* = p/P, t_* = t(U/L),$$

$$\vec{v}_* = \vec{v}/U, \omega_* = \omega/(PU/L)$$

$$\Phi(x, y, p, t) = \bar{\Phi}(p) + (f_0 UL)\Phi_*(x_*, y_*, p_*, t_*)$$

$$f = f_0(1 + \varepsilon_* \beta_* y_*)$$

$\varepsilon$  は  $O(1/10)$ 、ほかの項すべては  $O(1)$  と考える



$$\varepsilon_* \left( \frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial u_*}{\partial y_*} + \omega_* \frac{\partial u_*}{\partial p_*} \right) - (1 + \varepsilon_* \beta_* y_*) v_* + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x_*} = 0 \quad (1)'$$

$$\varepsilon_* \left( \frac{\partial v_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial v_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*} + \omega_* \frac{\partial v_*}{\partial p_*} \right) + (1 + \varepsilon_* \beta_* y_*) u_* + \frac{\partial \Phi_*}{\partial y_*} = 0 \quad (2)'$$

$$\frac{\partial \omega_*}{\partial p_*} = - \left( \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} \right) \quad (4)'$$

$$\varepsilon_* \left( \frac{\partial}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial}{\partial y_*} \right) \left( \frac{\partial \Phi_*}{\partial p_*} \right)$$

$$+ \frac{\omega_*}{p_*^2} \left[ \varepsilon_*^2 Ri_* + \varepsilon_* p_* \frac{\partial}{\partial p_*} \left( p_* \frac{\partial \Phi_*}{\partial p_*} - \kappa \Phi_* \right) \right] = 0 \quad (5)'$$

これから\*は除き、すべての従属変数を $\varepsilon$  展開する。

$$\vec{v}_h = \vec{v}_{h0} + \varepsilon \vec{v}_{h1} + \varepsilon^2 \vec{v}_{h2} + \dots$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$$

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots$$

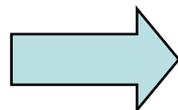
$O(1)$ :

$$v_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}$$

$$u_0 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}$$

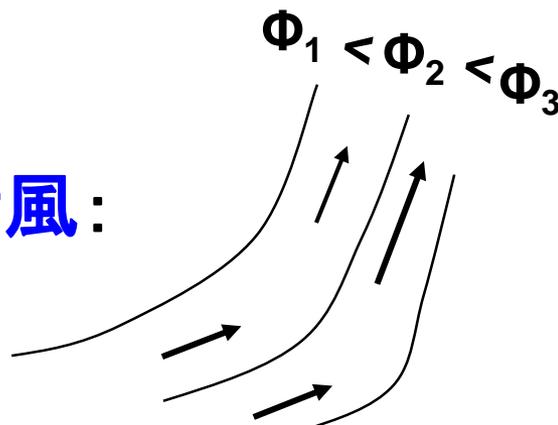
$$\frac{\partial \omega_0}{\partial p} = -\left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)$$

$$\omega_0 = 0$$



- ・地衡風
- ・水平発散 = 0
- ただし時間変動はない

地衡風:



$$\vec{v}_{h0} \neq 0, \omega_0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_\zeta \neq 0, \vec{v}_\delta = 0$$

Q2の回答

$O(\varepsilon)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) u_0 - v_1 - \beta y v_0 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 0 \quad (1)''$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) v_0 + u_1 + \beta y u_0 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0 \quad (2)''$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial p_*} = - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \quad (4)''$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial p} \right) + \omega_1 \sigma(p) = 0 \quad (5)''$$

where  $\sigma(p) = \varepsilon^2 Ri / p^2 \approx O(1)$

**これから、 $u_1$ ,  $v_1$ ,  $\Phi_1$ を消去する。**

## 第8回資料

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(2)''}{\partial x} - \frac{\partial(1)''}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) v_0 + u_1 + \beta y u_0 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) u_0 - v_1 - \beta y v_0 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

このうち、

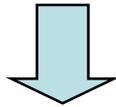
$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ & = -\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

などを使う

## 第8回資料

(1)''と(2)''の $\Phi$ を消去すると、 $\zeta$ (=渦度)方程式が得ら<sup>13</sup>れる。

$$\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi_0 \equiv \nabla^2 \Phi_0$$



$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta_0 + \beta v_0 - \frac{\partial \omega_1}{\partial p} = 0 \quad (6)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial p} \right) + \omega_1 \sigma(p) = 0 \quad (5)''$$

未知数は $\Phi_0$ と $\omega_1$ の二つであり、方程式も(6)と(5)''の二つとなるので、この系は完全系をなす。

これを**準地衡風予報方程式系** (quasi-geostrophic forecast equations; QG) という。

## 第9回資料

次元のある量で表現すると、(次元量に\*はつけない)<sup>1</sup>

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right) (\zeta_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (7)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( -\frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right) - \sigma \omega = 0 \quad (8)$$

ただし

$$\zeta_g = \vec{\nabla}^2 \Phi' / f_0, \quad \vec{v}_g = \vec{k} \times \vec{\nabla} \Phi' / f_0$$

$$\sigma = -\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dp} = \frac{1}{p} \frac{d}{dp} \left( p \frac{d\bar{\Phi}}{dp} - \frac{R}{c_p} \bar{\Phi} \right)$$

であり、 $\Phi'$ は水平面状の平均からのずれを表す。  
 $\sigma > 0$ である。

$$\begin{aligned}\vec{v}_h &= \vec{v}_{h0} + \varepsilon \vec{v}_{h1} + \varepsilon^2 \vec{v}_{h2} + \dots \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \\ \Phi &= \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots\end{aligned}$$

擾乱の大きさからいうと、 $\vec{v}_{h0} \neq 0$ ,  $\omega_0 = 0$

これは、水平風を渦成分と発散成分に分けると、渦成分の大きさが発散成分よりも一回りも大きいことを意味する。

$$\Rightarrow \vec{v}_\zeta \neq 0, \vec{v}_\delta = 0$$

このスケールの運動を見ると、風のほとんどが渦である(ほとんど地衡風)ことに相当する

**$\Rightarrow$  Q2の回答**

(7)と(8)から $\omega$ を消去すると、

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right) q = 0 \quad (9)$$

ここで

$$q = f + \zeta_g + f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right) \quad (10)$$

である。この $q$ は準地衡風予報方程式における  
**ポテンシャル渦位**であり、断熱過程や摩擦のない  
場合には保存量となる。

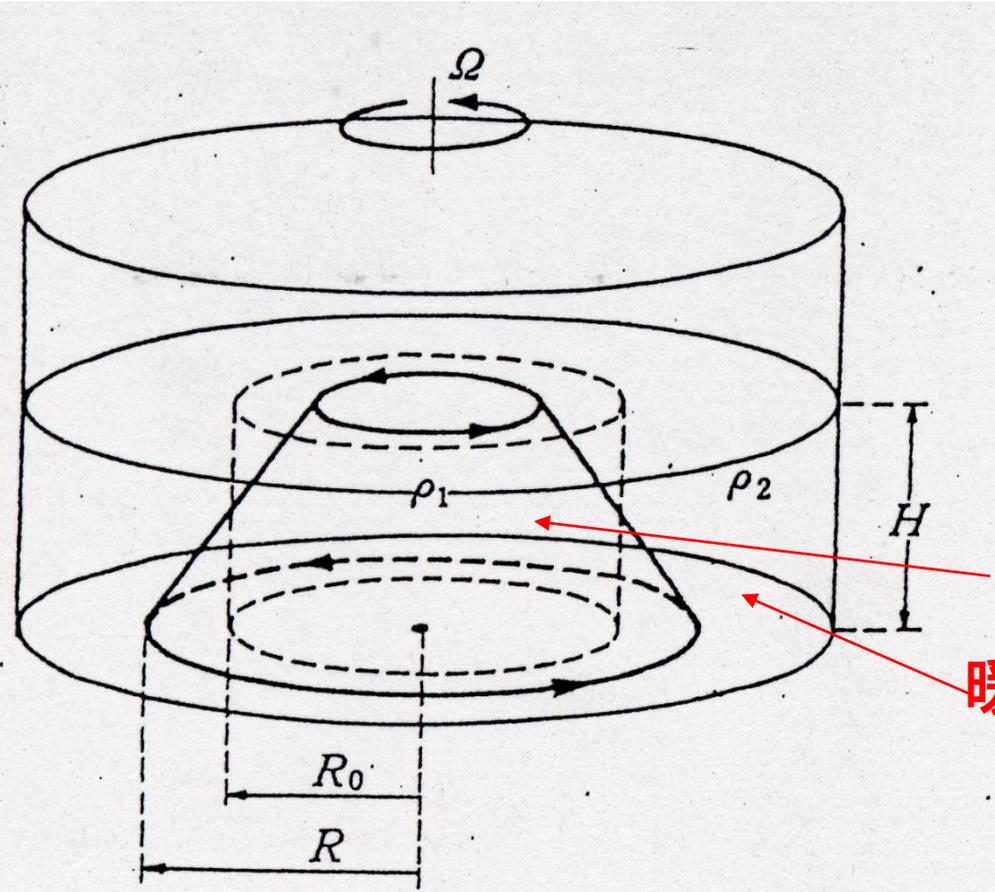
## ○準地衡風予報方程式系のまとめ;

- ・温位(つまり気圧)と流れは地衡風の関係で結びついている。断熱では、ただ一つの変数(ジオポテンシャル $\phi$ )を考えればよい。
- ・渦度  $\gg$  発散
  - 水平風が近似的に地衡風である → Q2への回答
- ・基本が線型な地衡風であるので、線型論による展開が可能となり、きわめて見通しがよい。

## ○準地衡風系とプリミティブ系の主な違い;

- ①渦度は地衡風を用いて計算される
- ②渦度は実際の風ではなくて、地衡流で移流される
- ③渦度の鉛直移流は考えない
- ④発散項はあるが、傾斜項(tilting term)はない

準地衡風方程式を用いて、Charney(1947)、Eady(1949)は東西に1000kmスケールの擾乱が卓越することを理論的に示した。ここでは室内実験による解を紹介する。(Q3に対する回答)



Rossbyの変形半径

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_0} gH}}{2\Omega}$$

冷たい領域

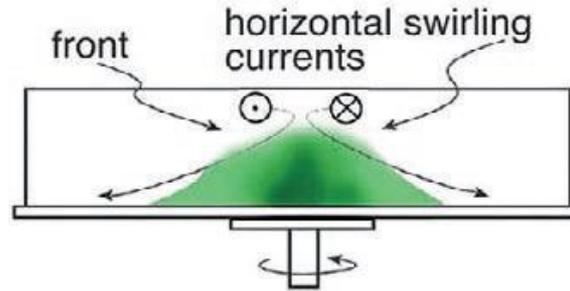
暖かい領域

図 4.4 地衡風調節を示す室内実験の概念図(Saunders, 1973).

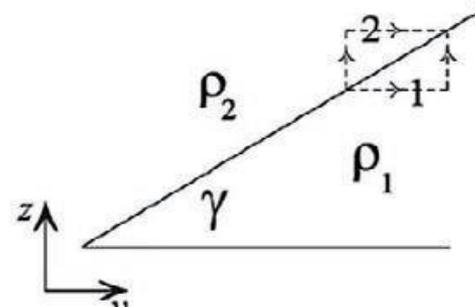
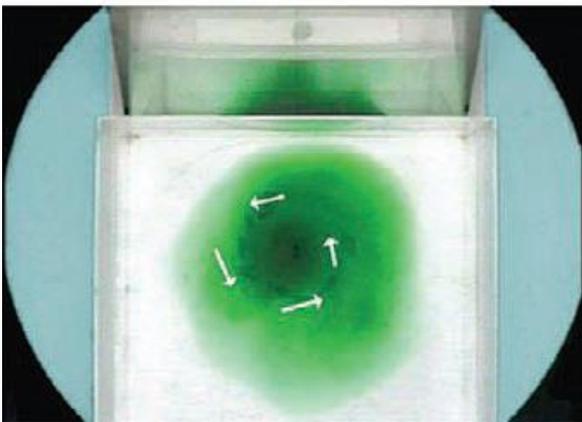
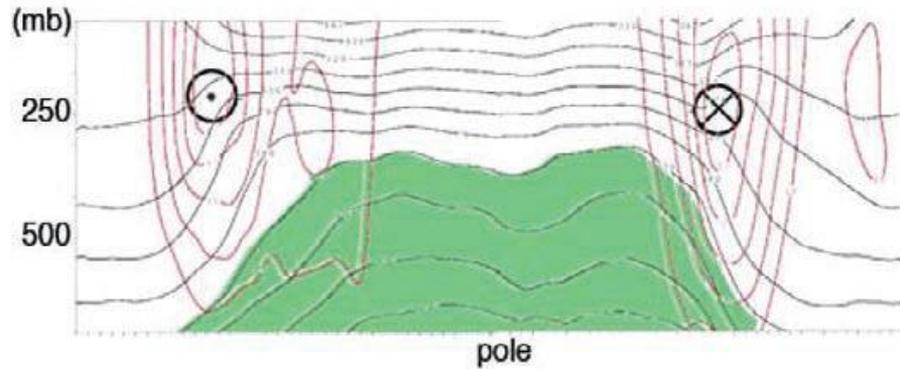
$$\rho_1 > \rho_2, \quad (\rho_1 + \rho_2) / 2 = \rho_0 \sim \rho_1 \sim \rho_2$$



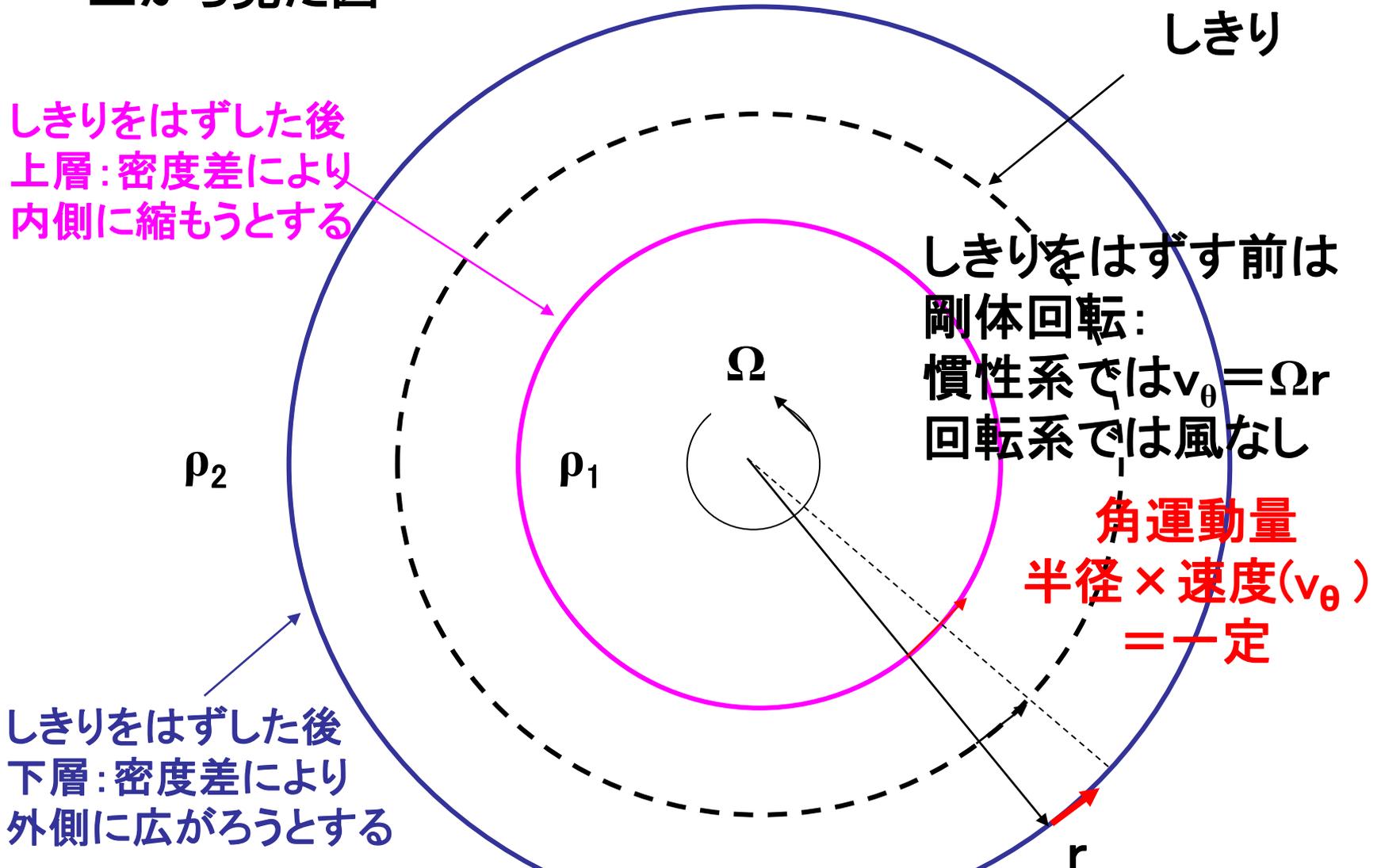
mirror reflecting side view



salt water sinking under gravity and rotation



# 上から見た図



角運動量保存によって速度が変わる→上層では西風が強まり、  
下層では西風が弱くなる→鉛直シアが発現する

$$\left(\frac{\lambda}{R}\right)^2$$

0.2

0.35

0.8

1.6

Vo

$$\left(\frac{\lambda}{R}\right)^2$$

2次元の温度風が成り立つのは  $R < \lambda$  の場合だけである。

では、 $R > \lambda$  の時はどうか？

$R$ が $\lambda$ より大きい場合は安定な $\lambda$ の大きさの渦になろうとする。そのために不安定が起こる。

→ **傾圧不安定波**の発生.

時間

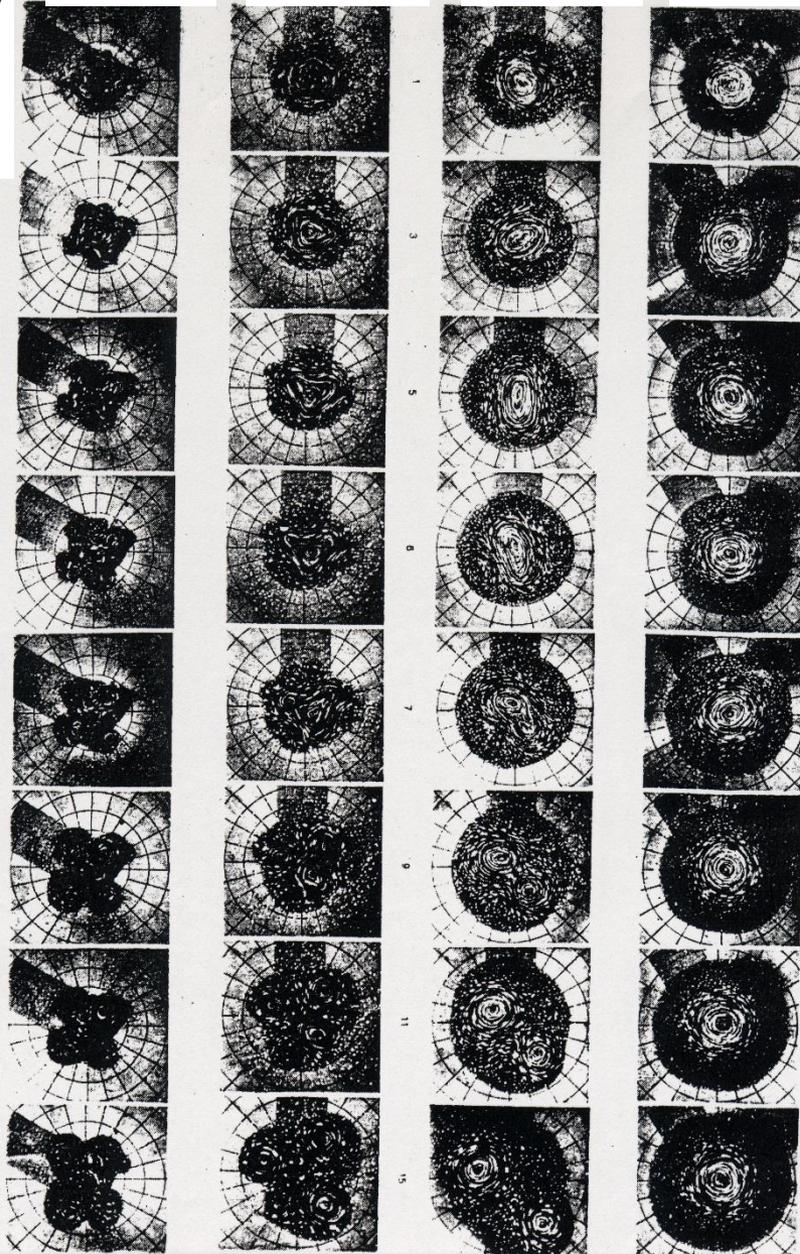


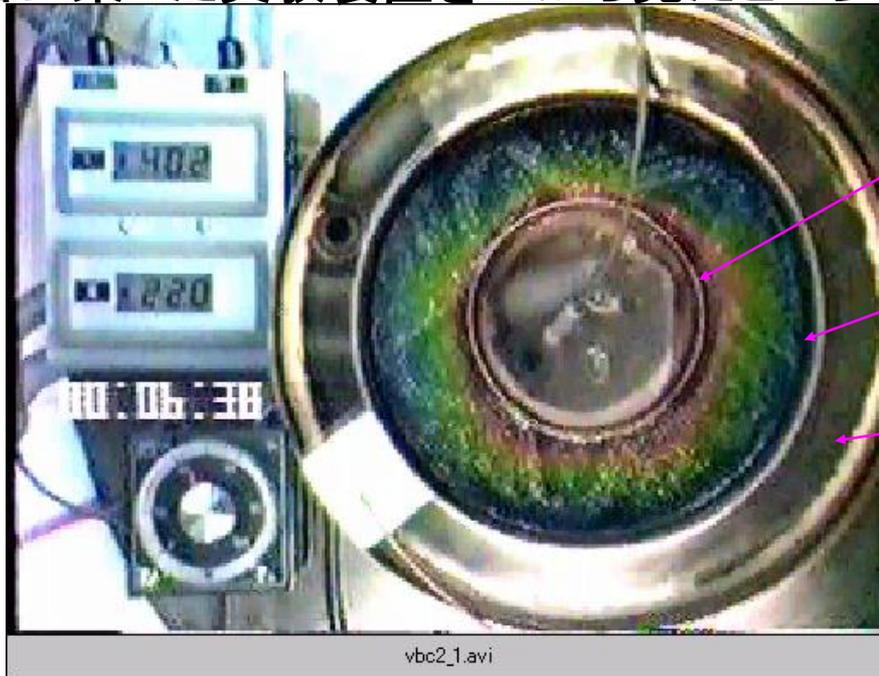
FIG. 2. Instability of two-layer vortex. From left to right,  $\theta=0.2, 0.35, 0.8, 1.6$ . Streak photographs of surface flow (counterclockwise) are shown at 1, 3, 5, 6, 7, 9, 11 and 15 rotations after withdrawal of cylinder. Concentric circles have spacing of 10 cm.

Saunders (1979)

- ・ $R < \lambda$  の場合、2次元の温度風の関係が成り立つ  
この場合、東西には波打たない擾乱のない状態
- ・ $R > \lambda$  の場合、東西方向に波を打ち、波動(擾乱)が現れる。そのスケールは $L \sim \lambda$  のスケールであり、それで安定な状態となる。
- ・東西波数としてロスビーの変形半径 $\lambda$  を持つ擾乱が発達しやすいことを表す → Q3の回答
- ・この特徴は理論解と一致する。

# 別の実験－傾圧不安定波の室内実験

回転台に乗った実験装置を上から見たところ



氷で冷やす  
極に対応

作業流体

お湯で温める  
熱帯に対応



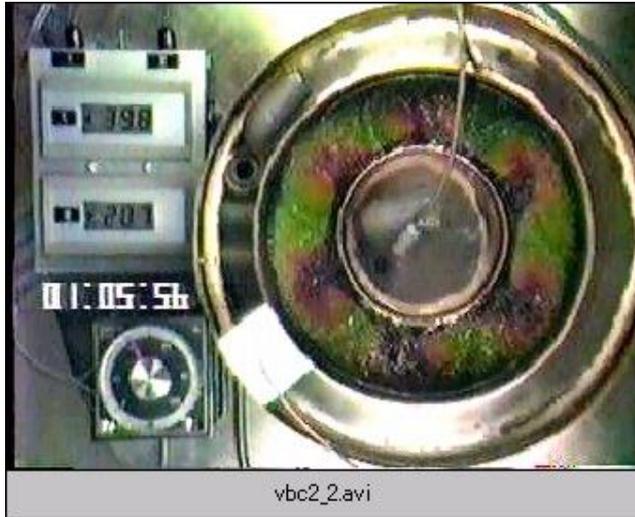
・定常的なパターンの流れ. [vbc2\\_1](#)

回転数 : 6rpm

外側の温度 : 40.4°C

内側の温度 : 22.0°C

## 傾圧不安定波の室内実験



- ・周期的に変動する流れ. [vbc2\\_2](#)
- 回転数: 12rpm  
外側の温度: 39.7°C  
内側の温度: 20.7°C



- ・乱れた流れ. [vbc2\\_3](#)
- 回転数: 20rpm  
外側の温度: 39.7°C  
内側の温度: 22.0°C
- ・条件によっては、非定常な流れもできる.

## 本講義のキーワード

- ・渦度、発散
- ・地衡風
- ・温度風
- ・渦位の保存
- ・準地衡風モデル
- ・ロスビーの変形半径( $\lambda$ )
- ・東西波長は $O(\lambda)$ のスケールの擾乱がもっとも発達しやすい