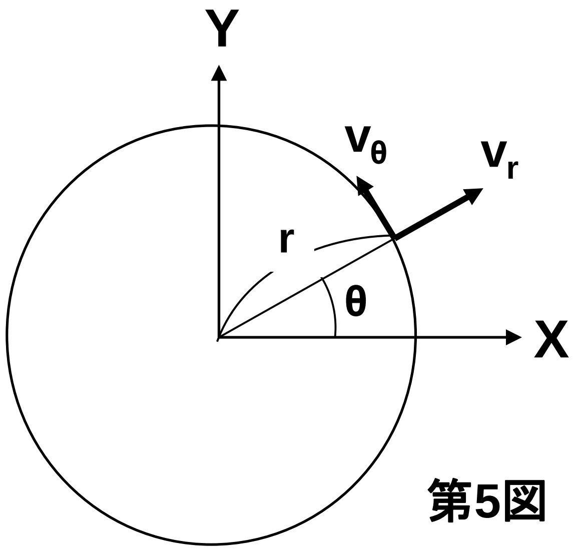
別の視点ー　コリオリカ

● 角運動量保存則などを用いた物理的な見方

流体中の運動を円筒座標系で記述することから始める．第5図のように，半径rと角度θ を定義してそれぞれの方向の速度成分をv_rとv_θ とすると，運動方程式は

$$\dot{v}_r - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad (12)$$

$$\dot{v}_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \qquad (13)$$



第5図

と書くことができる．φ は圧力を密度で割った量であるが，ここでは簡単のために圧力と呼ぶ．v_rとv_θ の上につけたドットは時間変化を表す。

$$\dot{A} \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + v_r \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta}$$

θ 方向に力が働かない場合には，(13)の右辺は0であり，(13)は $r dv_\theta/dt + v_r v_\theta = 0$ と表せる．これから# $d/dt(rv_\theta)=0$ となり，半径Rでは $M=Rv_\theta$ なる物理量が時間に関して一定である．つまり，Mは保存量であり，これは角運動量と呼ばれる．ひもの一端におもりをつけて回す場合，ひもの長さを徐々に短く(長く)すると，おもりの回転は徐々に速く(遅く)なる(小倉 1999)．
このとき，ひもの長さを変えるのはr方向でありθ 方向には力は働かないので，角運動量保存は成り立つ．

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$^{\#}:\ \dot{v}_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$$

$$r\dot{v}_\theta + v_\theta v_r = r\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) + v_\theta v_r$$

$$= \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial t} + v_r \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial \theta} \equiv \frac{d(r v_\theta)}{d t}$$

差し替え

ここで，Mを保存しながら半径RをΔ Rだけ変えてみる．そのとき V_θ もΔ v_θ だけ変わるとして2次以上の微少量を無視すると，
$\Delta v_\theta = -2\Omega \Delta R$が得られる．これをΔ tで割り，Δ tを無限小にすると，

$$\frac{\Delta \mathbf{v}_\theta}{\Delta \mathbf{t}} = -2\Omega \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta \mathbf{t}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{v}}_\theta = -2\Omega \mathbf{v}_r \tag{16}$$

が得られる．これはθ 方向の運動方程式のコリオリ力に相当する．

こうして得られるコリオリ力は，その働く方向は水平速度ベクトルの方向に直角であり，北(南)半球では右(左)の方向に向く．またこれは座標系の変形から生じた見かけの力であるから，運動エネルギーとしては寄与しない．

運動した時だけに現れるコリオリ力が直感と異なると思うのは，地球が自転するためにもともと傾いている自由表面を回転がないときの水平面と勘違いしたためである(木村 1979)．

差し替え

疑問

Q1. 上空にゆくほど西風が強くなっているのは？
また日本上空で西風ジェットが強いわけ?

Q2. 風と高度場の関係をみると、風向が等高度線にほぼ平行であるのはなぜだろうか？

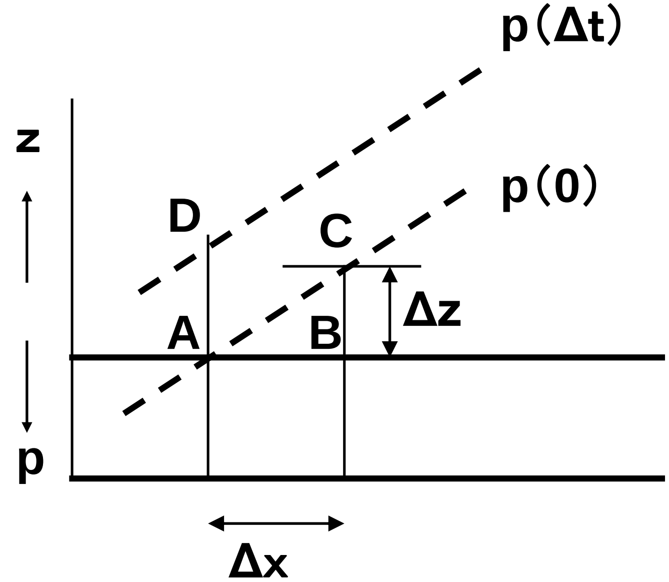
Q3. 1000km程度の東西波数の擾乱が見られるのはどうしてか？

1. デカルト系の方程式系からp系（気圧系）の方程式系を導出する
2. 準地衡風方程式を導出する
3. 1000km程度の東西波数をもつ傾圧不安定波がもっとも不安定であることを示す

p系で記述する

z＝z(x、y、p、t)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}=\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}\approx -\rho g\frac{\partial \varphi}{\partial p}$$



空間微分

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_z \approx \frac{\varphi_B-\varphi_A}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_p \approx \frac{\varphi_C-\varphi_A}{\Delta x}=\frac{\varphi_B-\varphi_A}{\Delta x}+\frac{\varphi_C-\varphi_B}{\Delta x}=\frac{\varphi_B-\varphi_A}{\Delta x}+\frac{\varphi_C-\varphi_B}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_p=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_z+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_z+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p$$

時間微分

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_z \approx \frac{\varphi_A(\Delta t)-\varphi_A(0)}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_p \approx \frac{\varphi_D(\Delta t)-\varphi_A(0)}{\Delta t}=\frac{\varphi_A(\Delta t)-\varphi_A(0)}{\Delta t}+\frac{\varphi_D(\Delta t)-\varphi_A(\Delta t)}{\Delta t}=\frac{\varphi_A(\Delta t)-\varphi_A(0)}{\Delta t}+\frac{\varphi_D(\Delta t)-\varphi_A(\Delta t)}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_p=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_z+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_z+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p$$

連続の式

○ z系の連続の式

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{v}} \; or \; \frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{\mathbf{v}}\right)=0 \qquad (4)$$

○ p系の連続の式

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dt}}\equiv\boldsymbol{\omega}\\&\rightarrow\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{t}}+\mathbf{u}\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{v}\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{y}}+\mathbf{w}\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{z}}\\&\approx-\rho\mathbf{gw}\end{aligned}}$$

の定義により、

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \qquad (4)'}$$

となる。ωはp速度と呼ばれる。

プリミティブモデル

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - \omega\frac{\partial u}{\partial p} + fv - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - \omega\frac{\partial v}{\partial p} - fu - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = \alpha \quad (3)$$

φ　は**ジオポテンシャル****（　=　gz）、αは比容。**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right) = -u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right) - v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right) - \frac{\omega}{p}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial \phi}{\partial p} - \kappa\phi\right)\right] = 0 \quad (5)$$

$$where\ \kappa = R/c_p \approx 2/7.$$

プリミティブ（primitive）と呼ぶ理由:　数値予報の発達の歴史的背景がある。1950年代に数値予報が基礎となった時代は、静水圧近似に加えて地衡風近似が用いられた。その後、コンピュータや数値計算技術などの進歩により、地衡風近似は用いずに静水圧近似だけを使い、元の圧縮性流体の運動方程式系に近い方程式形に戻ったという意味がある。（小倉、総観気象学入門より）

○p系は、気象学では使い勝手が良くてポピュラーな座標系

・高層ゾンデ観測からp系の方が直接的で使いやすい。
・連続の式から時間微分が消えて、非圧縮流体として扱うことができる
・絶対渦度の議論にソレノイド項が表れない
（pとx、yは独立変数であるので、この項は0となる）

$$\frac{d}{dt}(f+\zeta) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}\right)(f+\zeta)$$

$$= -(f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}\right)$$

$$\cancel{\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)} \Rightarrow 0$$

温度風（p系）

○p系において、u=u_g+u_a, v=v_g+v_a とすると、地衡風成分は

$$u_g = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

となる。これから、

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

となる。温位θ あるいは温度Tをつかうと

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{f_0 p}\frac{\partial \theta}{\partial y}\left(\frac{p}{p_{00}}\right)^{\kappa}, \quad \frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{R}{f_0 p}\frac{\partial \theta}{\partial x}\left(\frac{p}{p_{00}}\right)^{\kappa}$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial \ln p} = \frac{R}{f_0}\frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f_0}\frac{\partial T}{\partial x}$$

温度風（p系）

$$\frac{\partial u_g}{\partial \ln p} = \frac{R}{f_0}\frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f_0}\frac{\partial T}{\partial x}$$

・右辺の意味：　風の強さが高さ方向に変わる。
　　　　　　　　風の鉛直シアを表す。

・左辺の意味：　温度が水平方向に変わる。

・温度場が南北に傾いているとき（南が暖かく北が冷たいとき）
　東西風は高さとともに大きくなる。西風がつよくなる。

→　日本上空で西風のジェット気流がある理由

→　Q1 に対する回答

○　ナビエ･ストークスの方程式は、音波、重力波、表面波、ロスビー波など、微小なスケールから宇宙スケールまでの流体の運動を記述するので、さまざまな運動を含みうる。

○　その中で特定の周期で特定の長さの擾乱を見出すには、その擾乱を支配する力を抽出する必要がある。
それに対して、それ以外のものはノイズであり不要である。
つまり、みそもクソもある中から、みそだけを取り出す手法が必要となる。

○　みそだけを取り出すテクニックとは？

「準地衡風の世界」

●中緯度の総観規模の高･低気圧を抽出する

・擾乱の特徴的な水平スケール L～1000 km～10^6 m

・擾乱の代表的な風速 U～10 m s^{-1}

・擾乱の代表的な時間スケール T～L/U ～10^5 s

・P座標系における鉛直スケール D_p ～10^3 hPa

=10^5 kg m^{-1} s^{-2}

$$U \approx 10\, m\, s^{-1},\ f \approx 10^{-4} s^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{1}{L} \approx 10^{-6} m^{-1}, \frac{\partial}{\partial p} \approx \frac{1}{D_p} \approx 10^{-3} hPa^{-1}$$

$$u\frac{\partial}{\partial x} \approx v\frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{U}{L} \approx 10^{-5} s^{-1}, \frac{\partial}{\partial t} \approx \frac{U}{L} \approx 10^{-5} s^{-1}$$

$$\omega \approx \frac{UD_p}{L} \approx 10^{-2} hPa\, s^{-1},$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, (\vec{v} \bullet \vec{\nabla})\vec{v}, \omega\frac{\partial \vec{v}}{\partial p} \approx \frac{U^2}{L} \approx 10^{-4} m s^{-2}$$

$$\vec{k} \times f\, \vec{v} \approx fU \approx 10^{-3} m s^{-2}$$

運動方程式において、
水平加速度とコリオリ力の
大きさの比は

$\varepsilon_* = U/fL \simeq 10^{-1}$

コリオリパラメータ f は f_0(=2Ω sinφ$_0$)＋β yで表されるとする。これから代表的な量を用いてスケーリングして、方程式系を無次元化する。このとき、三つの無次元量(*つき)がでてくる。

$$\varepsilon_* = \frac{U}{f_0 L}, \quad \beta_* = \frac{L\cot\varphi_0}{a\,\varepsilon},$$

$$Ri_* = p\frac{d}{d\,p}\left(p\frac{\partial\Phi}{\partial p} - \kappa\Phi\right)\frac{1}{U^2} = -\frac{p^2\overline{\alpha}}{U^2}\frac{\partial\ln\overline{\theta}}{\partial p}$$

aは地球の半径、L/a～10^{-1}の程度、Ri はリチャードソン数と呼ばれ、その値は地表付近で約80、圏界面あたりで約65、成層圏では約200くらいであるので、対流圏では Ri は100ぐらいの定数と考える。つまり、

$$\varepsilon_* = 10^{-1}, \quad \beta_* = 1, \quad Ri_* = 10^2$$

とおく。

$$x_* = x/L,\, y_* = y/L,\, p_* = p/P,\, t_* = t(U/L),$$
$$\vec{v}_* = \vec{v}/U,\, \omega_* = \omega/(PU/L)$$
$$\Phi(x,y,p,t) = \overline{\Phi}(p) + (f_0 UL)\Phi_*(x_*, y_*, p_*, t_*)$$
$$f = f_0(1+\varepsilon_*\beta_* y_*)$$

ε はO(1/10)、ほかの項すべてはO(1)と考える

$$\varepsilon_*\left(\frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_*\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + v_*\frac{\partial u_*}{\partial y_*} + \omega_*\frac{\partial u_*}{\partial p_*}\right) - (1+\varepsilon_*\beta_* y_*)v_* + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x_*} = 0 \quad (1)'$$

$$\varepsilon_*\left(\frac{\partial v_*}{\partial t_*} + u_*\frac{\partial v_*}{\partial x_*} + v_*\frac{\partial v_*}{\partial y_*} + \omega_*\frac{\partial v_*}{\partial p_*}\right) + (1+\varepsilon_*\beta_* y_*)u_* + \frac{\partial \Phi_*}{\partial y_*} = 0 \quad (2)'$$

$$\frac{\partial \omega_*}{\partial p_*} = -\left(\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*}\right) \quad (4)'$$

$$\varepsilon_*\left(\frac{\partial}{\partial t_*} + u_*\frac{\partial}{\partial x_*} + v_*\frac{\partial}{\partial y_*}\right)\left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial p_*}\right) + \frac{\omega_*}{{p_*}^2}\left[{\varepsilon_*}^2 Ri_* + \varepsilon_* p_*\frac{\partial}{\partial p_*}\left(p_*\frac{\partial \Phi_*}{\partial p_*} - \kappa\Phi_*\right)\right] = 0 \quad (5)'$$

これから*は除き、すべての従属変数をε 展開する。

$$\vec{v}_h = \vec{v}_{h0} + \varepsilon \vec{v}_{h1} + \varepsilon^2 \vec{v}_{h2} + \bullet\bullet\bullet$$
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \bullet\bullet\bullet$$
$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \bullet\bullet\bullet$$

$O(1):$

$$v_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}$$

$$u_0 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial p} = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)$$

$$\omega_0 = 0$$

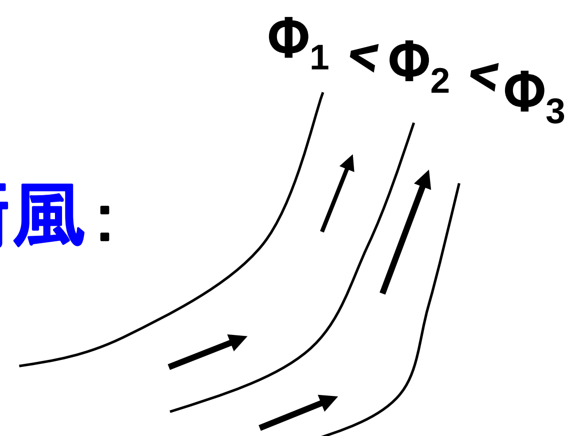
$\Rightarrow$

- 地衡風
- 水平発散 = 0

  ただし時間変動はない

$$\vec{v}_{h0} \neq 0, \omega_0 = 0$$
$$\Rightarrow \vec{v}_\zeta \neq 0,\ \vec{v}_\delta = 0$$

地衡風:



Q2の回答

$O(\varepsilon):$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}+v_0\frac{\partial}{\partial y}\right)u_0-v_1-\beta y v_0+\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}=0 \quad (1)''$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}+v_0\frac{\partial}{\partial y}\right)v_0+u_1+\beta y u_0+\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}=0 \quad (2)''$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial p_*}=-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \quad (4)''$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}+v_0\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial p}\right)+\omega_1\sigma(p)=0 \quad (5)''$$

$$where\, \sigma(p)=\varepsilon^2 Ri/p^2 \approx O(1)$$

これから、u_1, v_1, Φ_1を消去する。

(1)”と(2)”のΦを消去すると、ζ（＝渦度）方程式が得られる。

$$\varsigma_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi_0 \equiv \nabla^2 \Phi_0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \varsigma_0 + \beta v_0 - \frac{\partial \omega_1}{\partial p} = 0 \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial p} \right) + \omega_1 \sigma(p) = 0 \quad (5)''$$

未知数はΦ_0とω_1の二つであり、方程式も(6)と(5)”の二つとなるので、この系は完全系をなす。
これを準地衡風予報方程式系（quasi-geotrophic forecast equations；QG）という。

次元のある量で表現すると、(次元量に＊はつけない)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\varsigma_g+f\right)+f_0\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right)-\sigma\omega=0 \quad (8)$$

ただし

$$\varsigma_g=\vec{\nabla}^2\Phi'/f_0,\ \vec{v}_g=\vec{k}\times\vec{\nabla}\Phi'/f_0$$

$$\sigma=-\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\theta}}\frac{d\,\overline{\theta}}{d\,p}=\frac{1}{p}\frac{d}{d\,p}\left(p\frac{d\,\overline{\Phi}}{d\,p}-\frac{R}{c_p}\overline{\Phi}\right)$$

であり、Φ’は水平面状の平均からのずれを表す。
σ > 0である。

$$\vec{v}_h = \vec{v}_{h0} + \varepsilon \vec{v}_{h1} + \varepsilon^2 \vec{v}_{h2} + \bullet\bullet\bullet$$
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \bullet\bullet\bullet$$
$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \bullet\bullet\bullet$$

擾乱の大きさからいうと、$\vec{v}_{h0} \neq 0, \omega_0 = 0$

これは、水平風を渦成分と発散成分に分けると、渦成分の大きさが発散成分よりも一回りも大きいことを意味する。

$$\Rightarrow \vec{v}_\zeta \neq 0,\ \vec{v}_\delta = 0$$

このスケールの運動を見ると、風のほとんどが渦である（ほとんど地衡風）ことに相当する

⇒ Q2の回答

(7)と(8)からωを消去すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}+v_g\frac{\partial}{\partial y}\right)q=0 \quad (9)$$

ここで

$$q=f+\varsigma_g+f_0\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\Phi'}{\partial p}\right) \quad (10)$$

である。このqは準地衡風予報方程式における ポテンシャル渦位であり、断熱過程や摩擦のない場合には保存量となる。

○準地衡風予報方程式系のまとめ；
・温位（つまり気圧）と流れは地衡風の関係で結びついている。断熱では、ただ一つの変数（ジオポテンシャルφ）を考えればよい。
・渦度 >> 発散
→水平風が近似的に地衡風である → Q2への回答
・基本が線型な地衡風であるので、線型論による展開が可能となり、きわめて見通しがよい。

○準地衡風系とプリミティブ系の主な違い；
①渦度は地衡風を用いて計算される
②渦度は実際の風ではなくて、地衡流で移流される
③渦度の鉛直移流は考えない
④発散項はあるが、傾斜項（tilting term）はない