

デカルト系における乾燥大気の支配方程式

1

7変数($u, v, w, p, T, \rho, \theta$) $\rightarrow$ 7つの式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x \quad (1)$$

x方向の加速度=移流項+コリオリ力+気圧傾度力+その他の力

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y \quad (2)$$

y方向の加速度=移流項+コリオリ力+気圧傾度力+その他の力

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + f_z \quad (3)$$

z方向の加速度=移流項+気圧傾度力+重力+その他の力

デカルト系における乾燥大気の支配方程式

2

7変数($u, v, w, p, T, \rho, \theta$) $\rightarrow$ 7つの式

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4)$$

連続の式

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{C_p T} Q \quad (5)$$

熱の式

$$p = \rho R T \quad (6)$$

気体の状態方程式

$$\theta = T \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{R/C_p} \quad (7)$$

温位の定義

○大規模の運動における重要なスカラー量の定義:

▪ (鉛直) 渦度

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

▪ 水平発散

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

○本来なら渦度は下記のように三つの成分をもつベクトル量であるが、大規模な運動では ζ だけが大きい。

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

渦度方程式の導出

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt}(f + \zeta) &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) (f + \zeta) \\ &= -(f + \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

ここではfは定数。f+ ζ を絶対渦度という。右辺第1項は発散項、第2項は立ち上がりの項あるいは傾きの項 (tilting term)、第3項はソレノイド項 (solenoidal term) という

傾きの項 (tilting term)

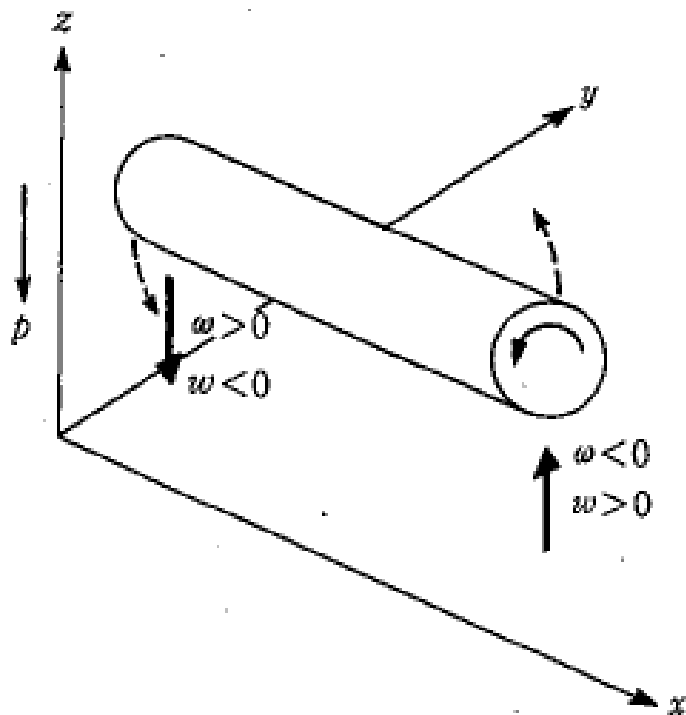


図 3.5 渦管が傾くことによって、 x 軸に平行な方向の渦度成分が鉛直方向の渦度成分をつくる。

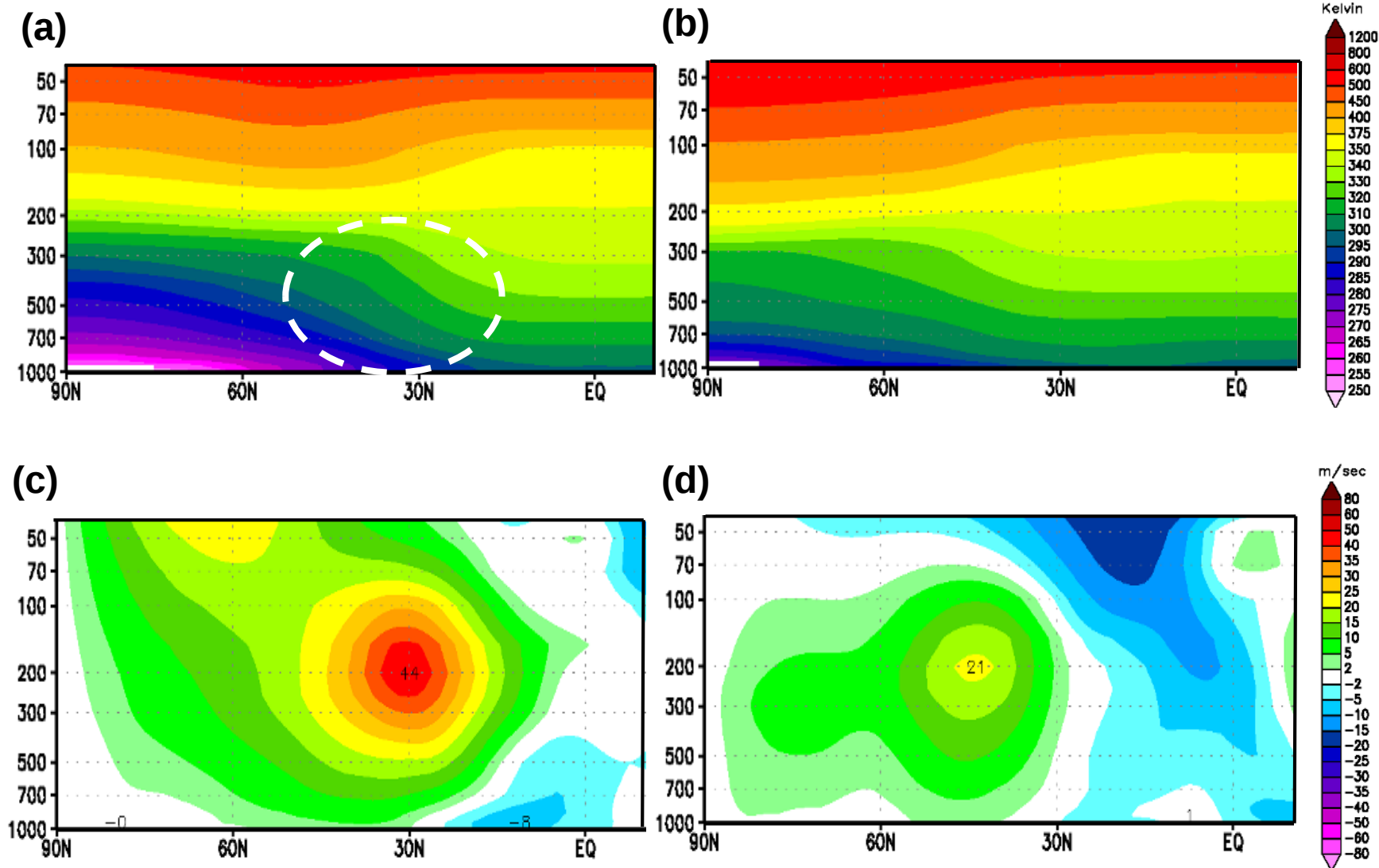
$-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}$ は正であるから、

$\zeta + \mathbf{f}$ は時間と共に増大する。

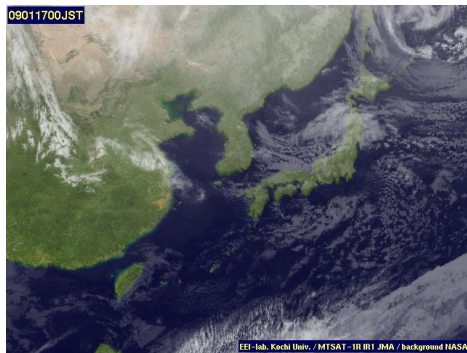
剛体の類推

円筒が東西方向に向いた軸のまわりに、東側からみて反時計まわりに回転しているとき、回転軸の東側を持ち上げ、西側を下げると、円筒は水平面から傾き、鉛直軸のまわりの反時計まわりの渦度（正渦度）が増加する

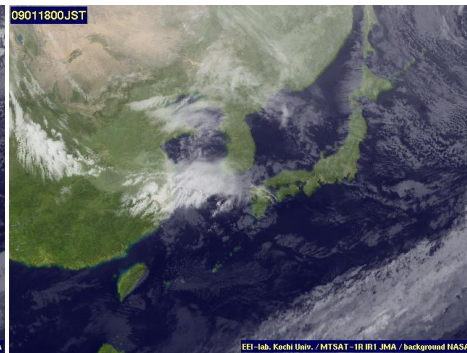
小倉義光「気象力学通論」



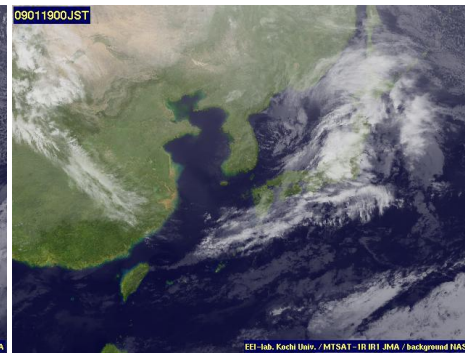
1 月と7 月の東西平均した温位と東西風の南北-気圧分布 (JRA-25、気象庁・(財)電力中央研究所)。(a)と(b)は温位、(c)と(d)は東西風。(a)と(c)は1 月、(b)と(d)は7 月。白丸は北半球の対流圏中緯度帯を示す。



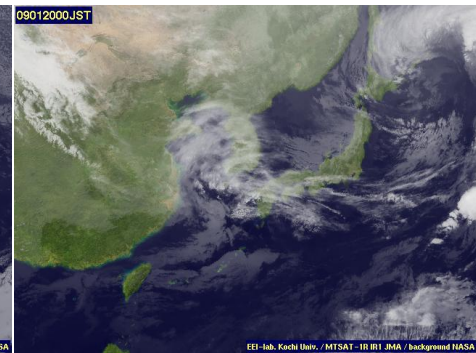
2009年1月17日9時



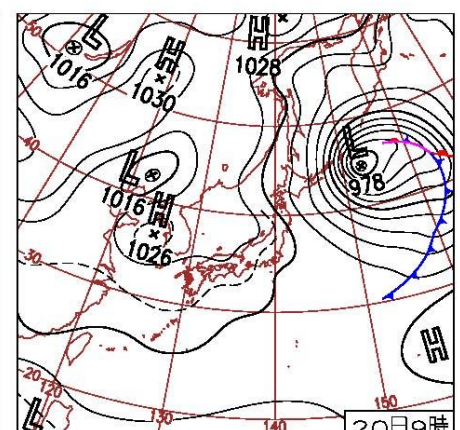
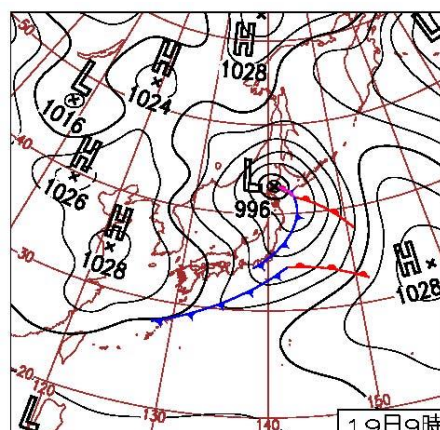
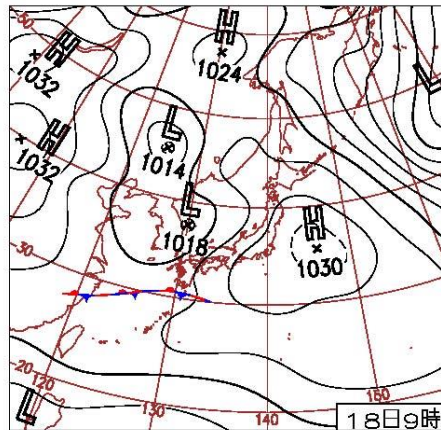
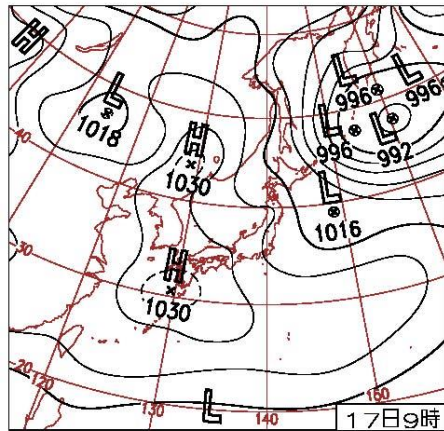
2009年1月18日9時



2009年1月19日9時



2009年1月20日9時



2009 年1 月17 日から20 日までの1 日ごとの衛星写真(高知大学)と地上天気図(気象庁)。1000km スケールの高・低気圧の擾乱が西から移動するのが見られる

温帯低気圧の発達 (水平パターン)

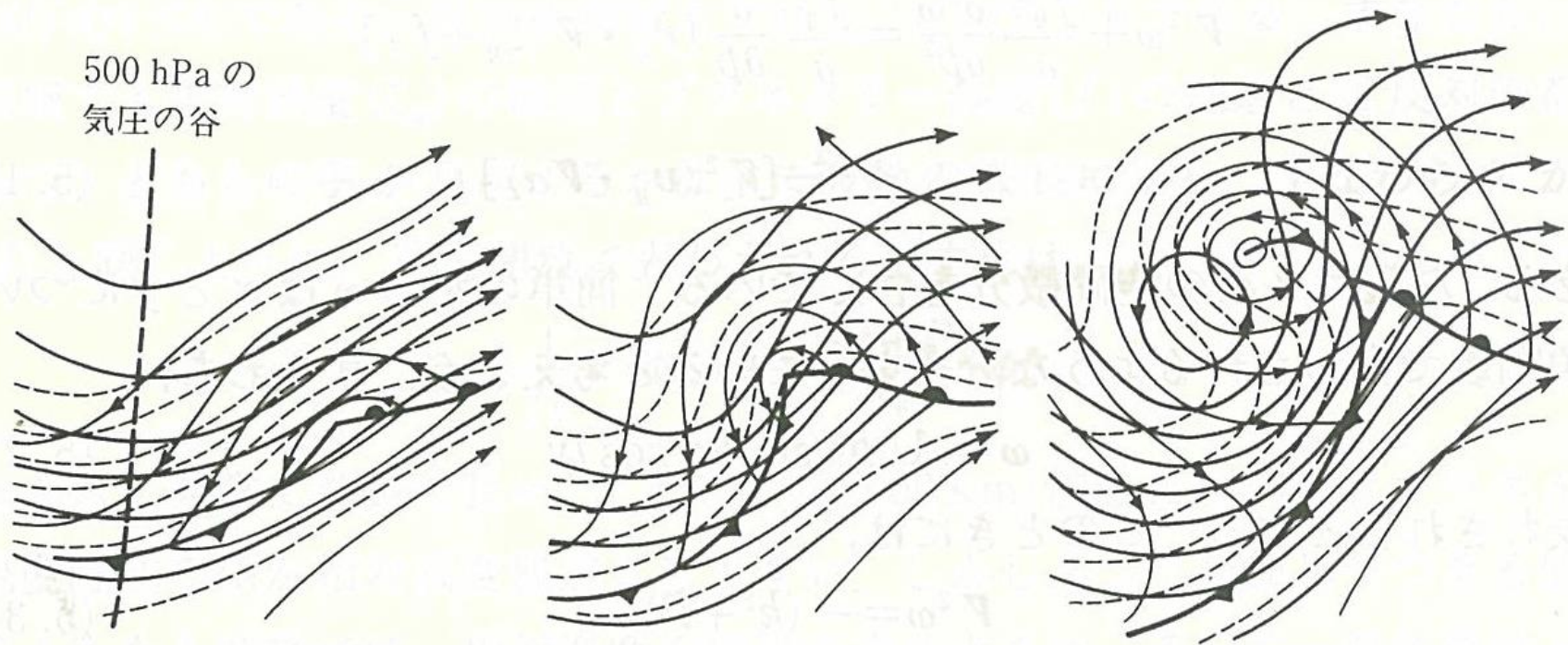
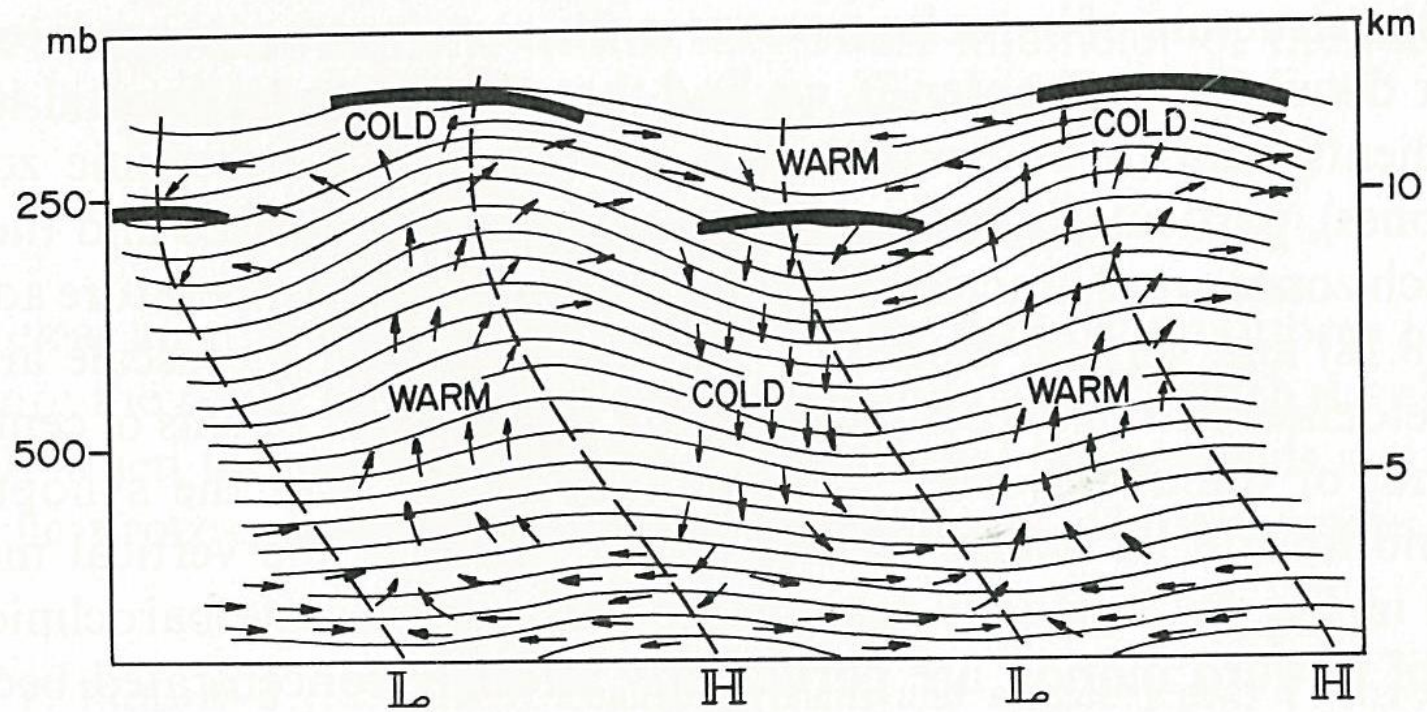


図 5.2 温帯低気圧の発達の 3 段階を示す模式図(Palmén and Newton, 1969).

太い実線は 500 hPa の等高線, 細い実線が 1,000 hPa の等高線, 破線は 1,000 hPa と 500 hPa の間の平均気温(thickness).

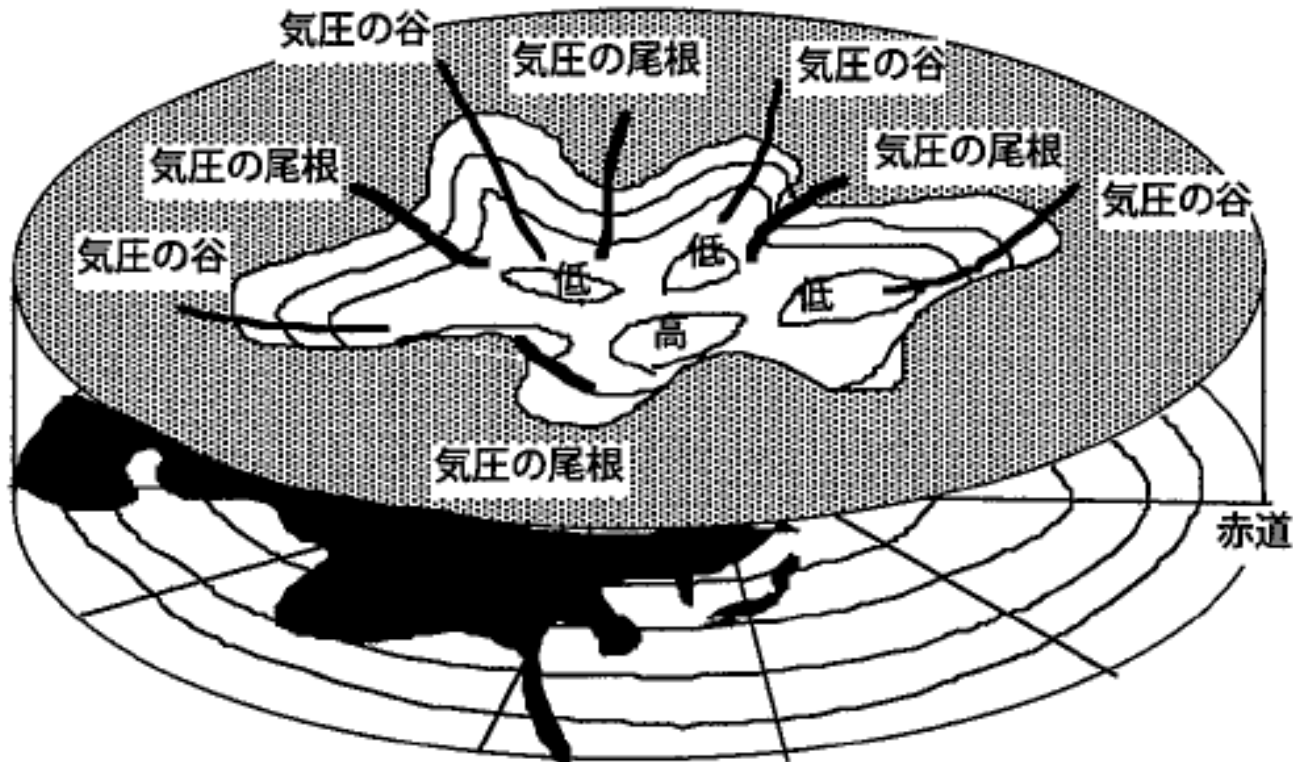
温帯低気圧の発達 (x、z)



低気圧は、トラフの前面で南風、暖気の流入があり、鉛直方向に軸が西に傾いているときに、発達する。

北半球の500hPa(対流圏中層)の等圧面の分布

(木村、ジュニア新書から)



* デカルト系(x、y、z)よりも気圧系(x、y、p)の方が記述しやすい

疑問

**Q1. 上空にゆくほど西風が強くなっているのは？
また日本上空で西風ジェットが強いわけ？**

**Q2. 風と高度場の関係をみると、風向が等高度
線にほぼ平行であるのはなぜだろうか？**

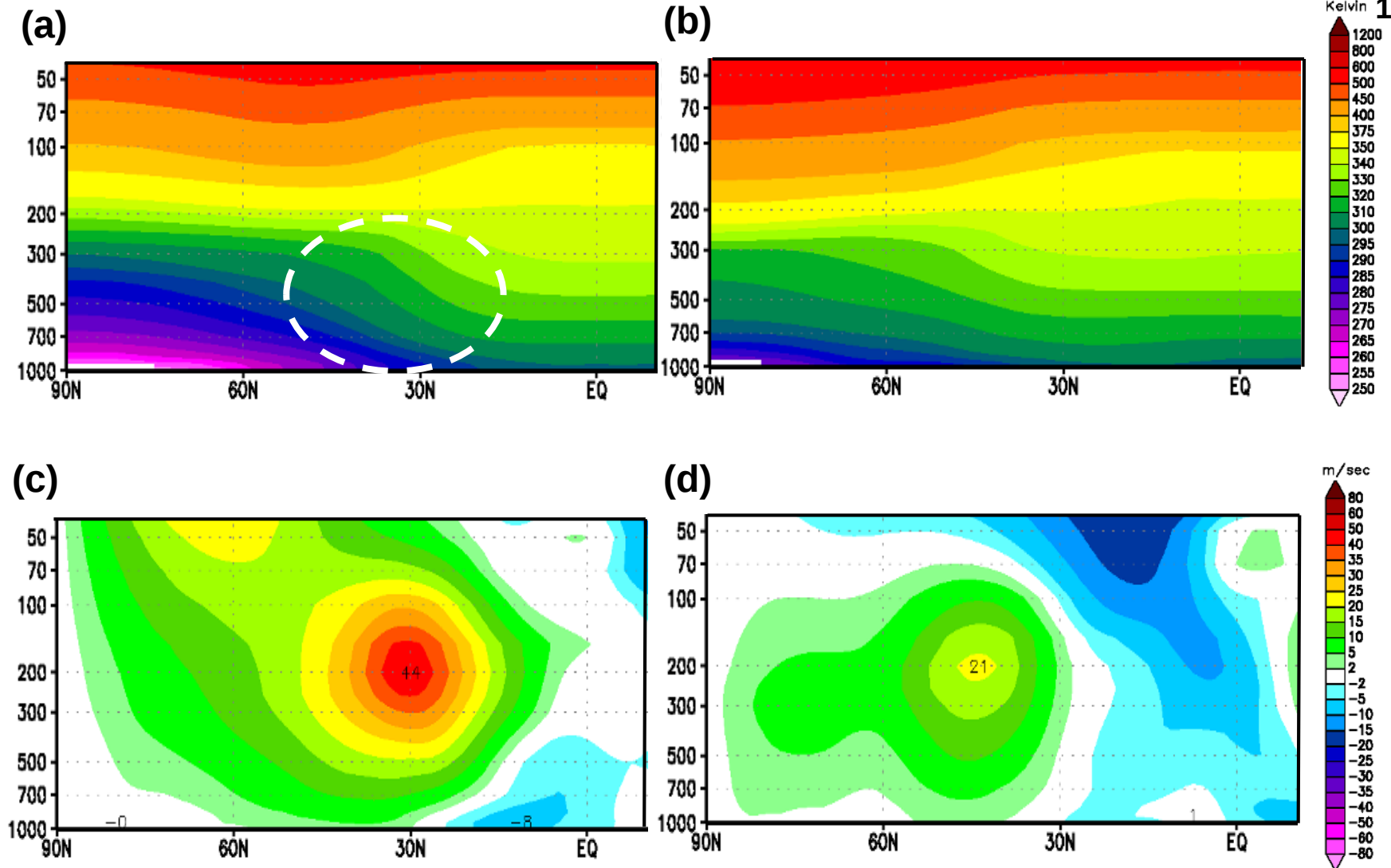
**Q3. 1000km程度の東西波数の擾乱が見られる
のはどうしてか？**

傾圧不安定波は中高緯度帯に見られる
総観規模低気圧(温帯低気圧)にあたる。
その発生を調べてみる。

中緯度の大規模擾乱では地球自転の効果と
南北の温度傾度との絶妙なコンビネーション

ステップ

1. デカルト系の方程式系からp系(気圧系)の方程式系を導出する
2. 準地衡風方程式を導出する
3. 1000km程度の東西波数をもつ傾圧不安定波がもっとも不安定であることを示す



1 月と7 月の東西平均した温位と東西風の南北-気圧分布 (JRA-25、気象庁・(財)電力中央研究所)。(a)と(b)は温位、(c)と(d)は東西風。(a)と(c)は1 月、(b)と(d)は7 月。白丸は北半球の対流圏中緯度帯を示す。

温度風

$$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \right) - f \bar{u} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$$

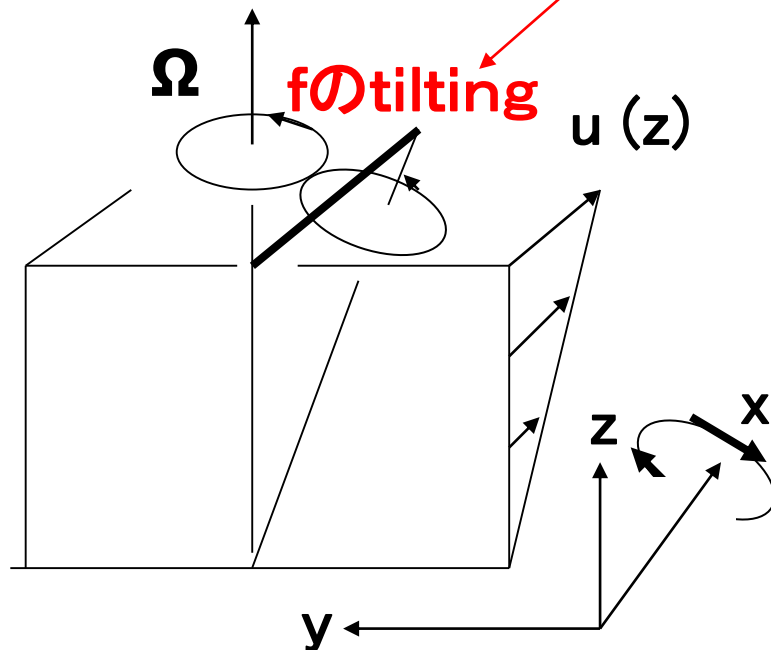
地衡風

$$\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} = 0$$

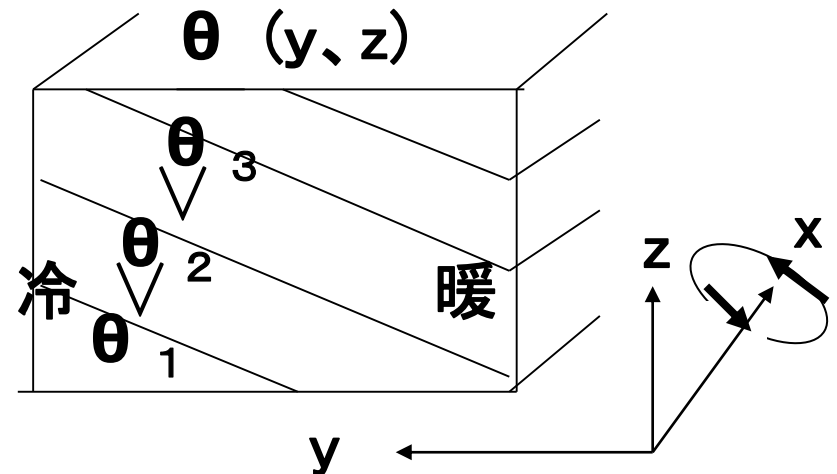
静水圧

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = f \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = 0$$

温度風 ⇒ Q1の回答



浮力によるトルク

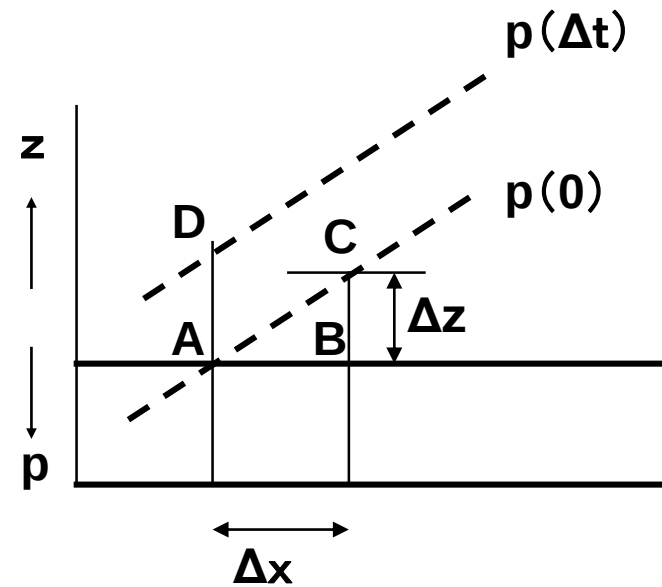


p系で記述する

14

$$z = z(x, y, p, t) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \approx -\rho g \frac{\partial \phi}{\partial p}$$



空間微分

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right)_z \approx \frac{\phi_B - \phi_A}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right)_p \approx \frac{\phi_C - \phi_A}{\Delta x} = \frac{\phi_B - \phi_A}{\Delta x} + \frac{\phi_C - \phi_B}{\Delta x} = \frac{\phi_B - \phi_A}{\Delta x} + \frac{\phi_C - \phi_B}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right)_p = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right)_z + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{z}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \right)_p = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right)_z + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \right)_p$$

時間微分

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_z \approx \frac{\phi_A(\Delta t) - \phi_A(0)}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_p \approx \frac{\phi_D(\Delta t) - \phi_A(0)}{\Delta t} = \frac{\phi_A(\Delta t) - \phi_A(0)}{\Delta t} + \frac{\phi_D(\Delta t) - \phi_A(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\phi_A(\Delta t) - \phi_A(0)}{\Delta t} + \frac{\phi_D(\Delta t) - \phi_A(\Delta t)}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_p = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_z + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{z}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \right)_p = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_z + \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \right)_p$$

○ z系の連続の式

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \text{ or } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4)$$

○ p系の連続の式

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &\equiv \omega \\ &\rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \\ &\approx -\rho g w \end{aligned}$$

の定義により、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (4)'$$

となる。 ω はp速度と呼ばれる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + f v - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - f u - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = \alpha \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad \phi \text{ はジオポテンシャル (= } gz \text{)、} \alpha \text{ は比容。} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \frac{\omega}{p} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(p \frac{\partial \phi}{\partial p} - \kappa \phi \right) \right] = 0 \quad (5)$$

where $\kappa = R / c_p \approx 2 / 7$.

プリミティブ(primitive)と呼ぶ理由: 数値予報の発達の歴史的背景がある。1950年代に数値予報が基礎となった時代は、静水圧近似に加えて地衡風近似が用いられた。その後、コンピュータや数値計算技術などの進歩により、地衡風近似は用いずに静水圧近似だけを使い、元の圧縮性流体の運動方程式系に近い方程式形に戻ったという意味がある。(小倉、総観気象学入門より)

Op系は、気象学では使い勝手が良くてポピュラーな座標系

- ・高層ゾンデ観測からp系の方が直接的で使いやすい。
- ・連続の式から時間微分が消えて、非圧縮流体として扱うことができる
- ・絶対渦度の議論にソレノイド項が表れない
(pとx、yは独立変数であるので、この項は0となる)

$$\frac{d}{dt}(f + \zeta) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \right) (f + \zeta)$$

$$= -(f + \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right)$$

$$\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Rightarrow 0$$

温度風 (p系)

Op系において、 $u=u_g+u_a$, $v=v_g+v_a$ とすると、地衡風成分は

$$u_g = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

となる。これから、

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

となる。温位 θ あるいは温度 T をつかうと

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{f_0 p} \frac{\partial \theta}{\partial y} \left(\frac{p}{p_{00}} \right)^{\kappa}, \quad \frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{R}{f_0 p} \frac{\partial \theta}{\partial x} \left(\frac{p}{p_{00}} \right)^{\kappa}$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial \ln p} = \frac{R}{f_0} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f_0} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

温度風 (p系)

$$\frac{\partial u_g}{\partial \ln p} = \frac{R}{f_0} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f_0} \frac{\partial T}{\partial x}$$

- ・右辺の意味： 風の強さが高さ方向に変わる。
風の鉛直シアを表す。
 - ・左辺の意味： 温度が水平方向に変わる。
 - ・温度場が南北に傾いているとき（南が暖たく北が冷たいとき）
東西風は高さとともに大きくなる。西風が上層ほど強くなる。
- 日本上空で西風のジェット気流がある理由
- Q1 に対する回答