デカルト系における運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{-u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{移流項}} \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{気圧傾度力}} \underbrace{+ f v}_{\text{コリオリ項}} + f_x \qquad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \underbrace{-u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z}}_{\text{移流項}} \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{気圧傾度力}} \underbrace{- f u}_{\text{コリオリ項}} + f_y \qquad (12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \underbrace{-u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{移流項}} \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}}_{\text{気圧傾度力}} \underbrace{- g}_{\text{重力項}} + f_z \qquad (13)$$

地球の自転

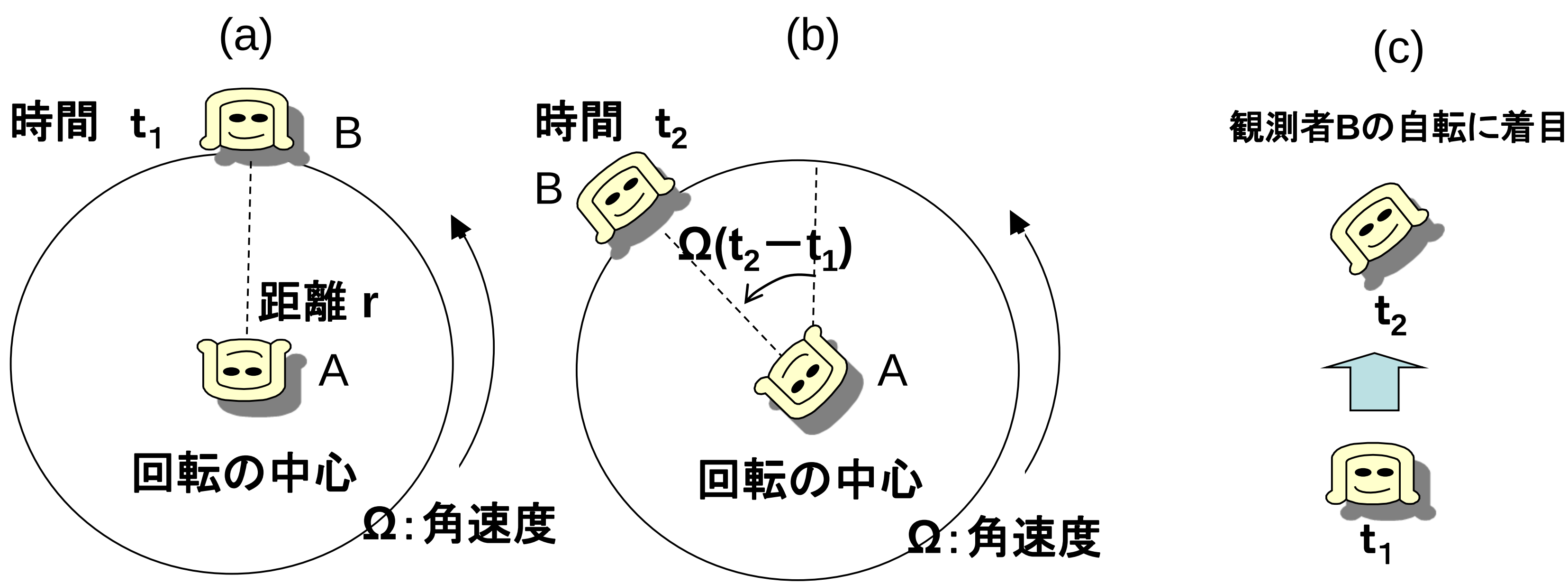
* 宇宙から地上のわれわれを眺めると、赤道上ではどのような速度で回転しているのだろうか? ー慣性系からの視点

* 地球の円周 ---- 40,000 km
* 自転速度　= 40,000 km / 24 hr ≈ 1,666 km/hr
(=角速度）　≈ 460 m/s.
→音速より早い速度で回っている!
* しかし、誰もそのような高速で回っているとは気づいていない
→ なぜ?
* 実は地球と一体となって我々も地球と同じように回っている
→ 剛体回転
* 地球上の“静止”状態とは、慣性系では地球と同じように回っている状態のことである （回転系）.

回転系･慣性系･剛体回転

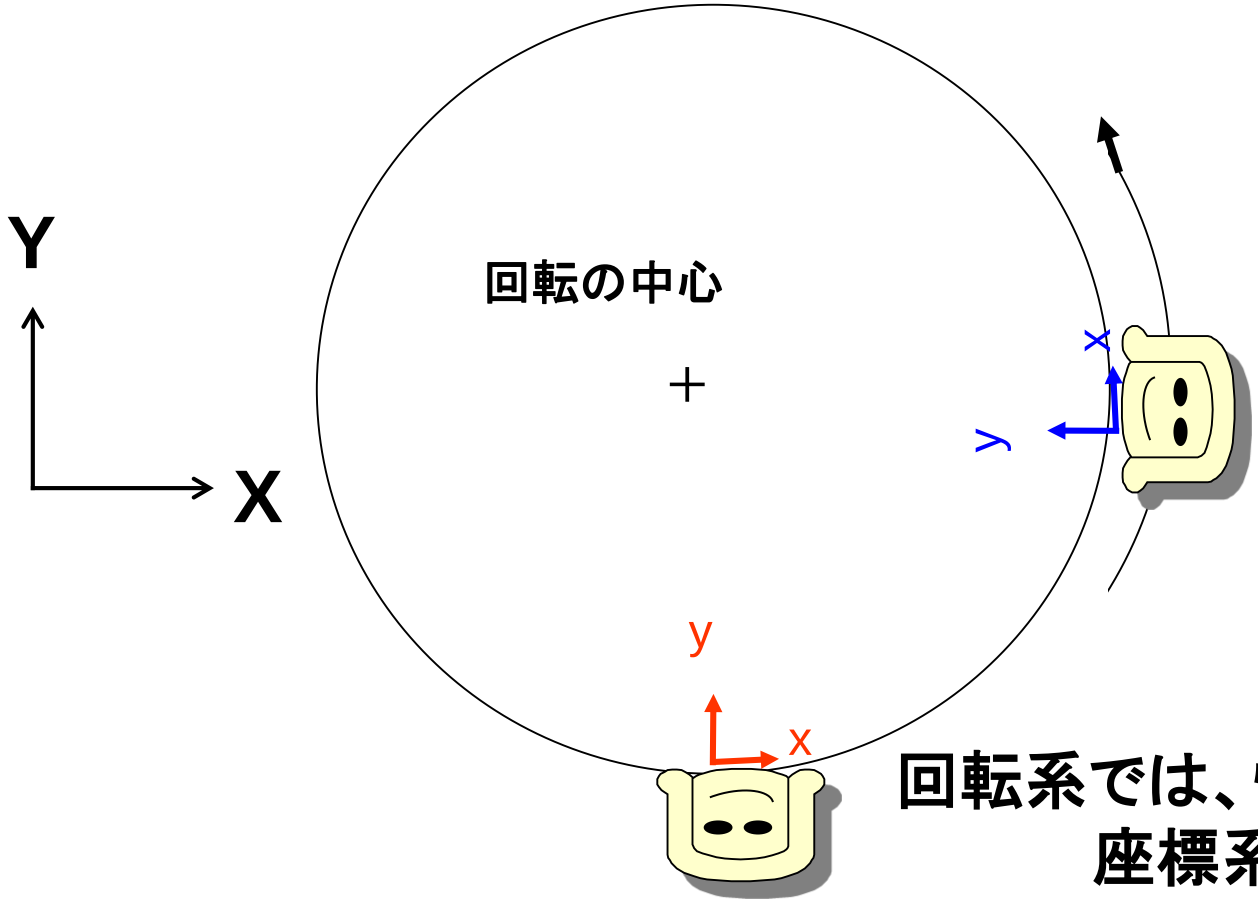
一定の回転速度（角速度：Ω。反時計回りを正とする。北半球に相当 ）で回る円盤に乗って、観測者Aは回転の中心位置にいて、観測者Bは中心から距離 r 離れた位置にいるとして、お互い常に顔を見合わせているとする。

回転系： 時間t_1(図1a)から時間t_2(図1b)の間、観測者Aと観測者Bは静止している.
慣性系： 観測者Aは角速度Ωで自転しながら静止している。観測者Bは半径rの円周を回りながら、観測者Bの自転に着目すると、やはり角速度Ωで自転する(図1c) .
剛体回転： 回転系では、場所は違っても同じ角速度で自転している。



慣性系と回転系の関係

慣性系から見ると、回転系の座標系は、回転とともに方向を変えることを意味する。

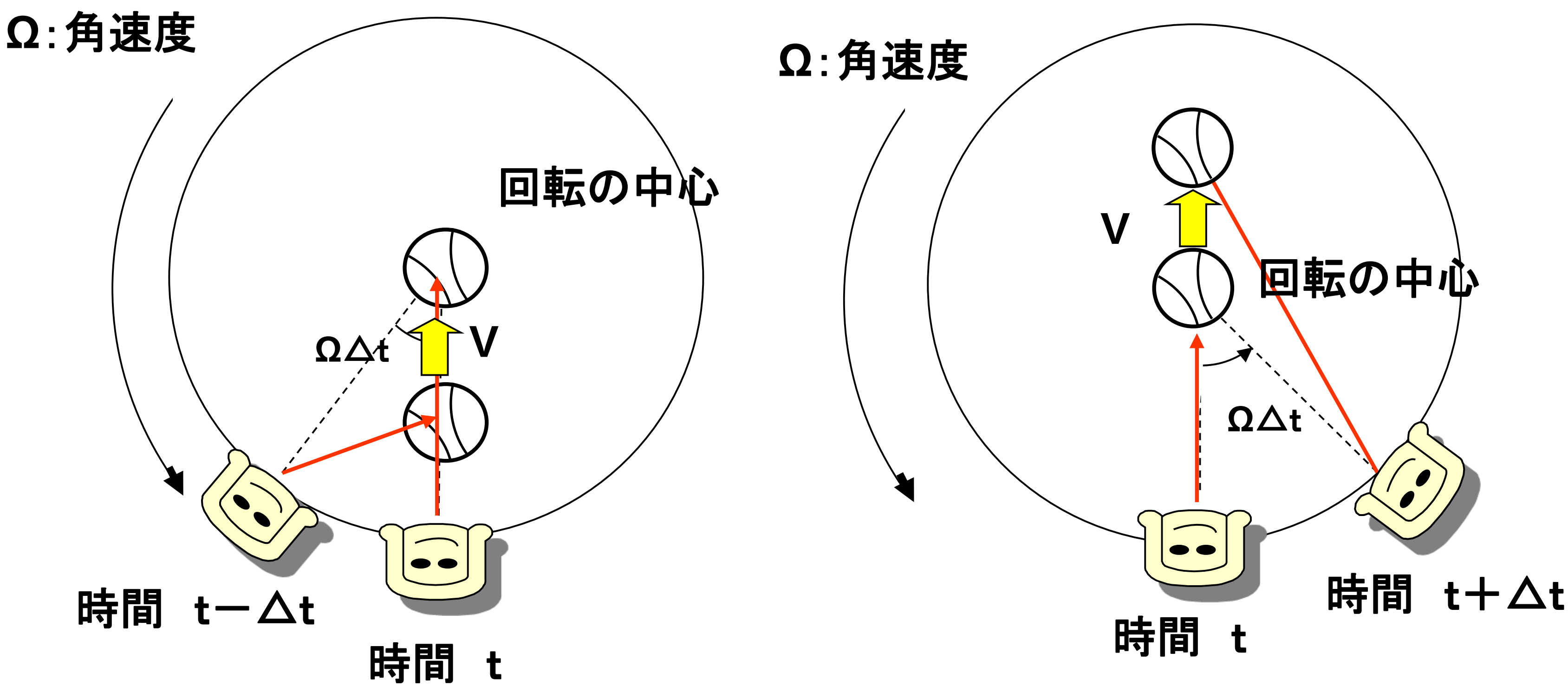


回転系では、慣性系から見ると
座標系が変わる

前回の設定

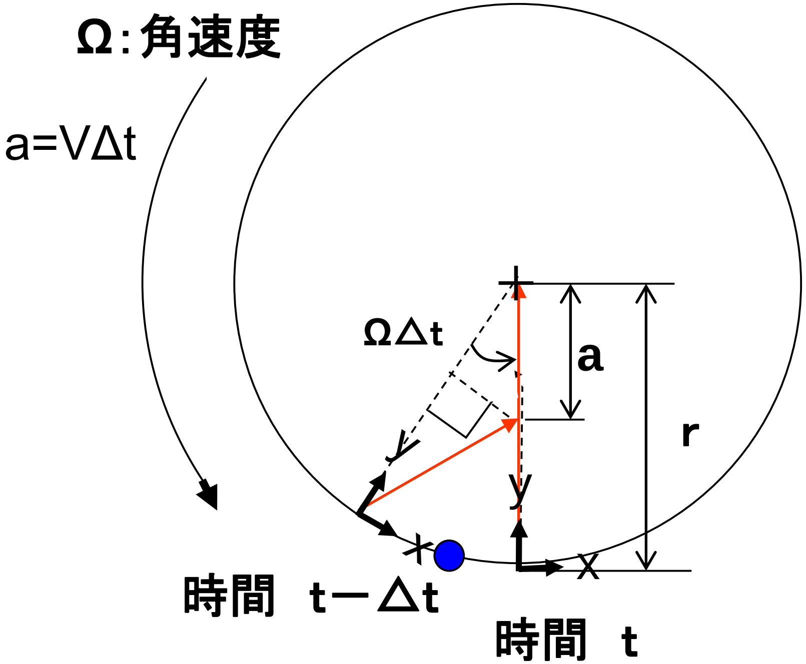
ボールが回転軸と通る場合

・回転の中心を通 … t における
加速度を求めて …
・慣性系から見る … るのだから、
ボールの運動は加速度運動ではない。ところが、回転系ではどうなるか？
・t－Δt ～ t と t ～ t＋Δt の時間帯に分けて考える。ここで、Δtは微小であると仮定する。



赤い矢印はそれぞれの時間における観測者からみたるボールの位置である。

回転系にいる観測者にとってのボールの t−Δt ～ t の間の平均速度を求める。



	(x 座標	, y 座標)
時間 t −Δt:	(a sin (ΩΔt)	, r - a cos (ΩΔt))
時間 t :	(0	, r)

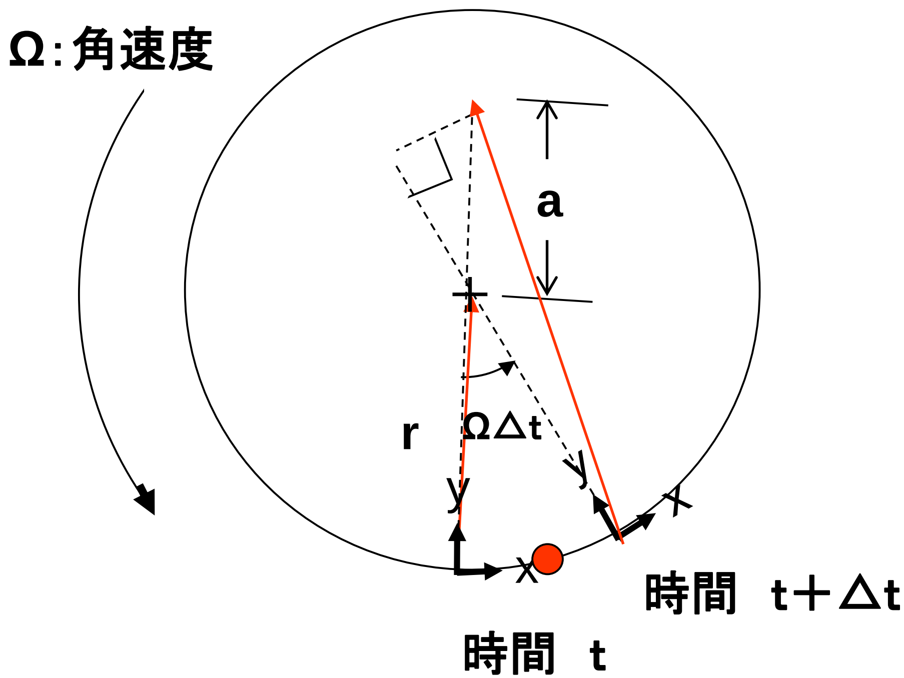
t ～ t−Δtの平均速度:

$$\left[\frac{0-a\sin\left(\Omega\Delta t\right)}{t-(t-\Delta t)},\frac{r-\left[r-a\cos\left(\Omega\Delta t\right)\right]}{t-(t-\Delta t)}\right]$$

⇩

●の点 $$\left[\frac{-a\sin\left(\Omega\Delta t\right)}{\Delta t},\frac{a\cos\left(\Omega\Delta t\right)}{\Delta t}\right]$$

同様に、t ～ t+Δt の間の平均速度を求める。



	(x 座標	, y 座標)
t :	(0	, r)
t +Δt :	(a sin (ΩΔt)	, r+ a cos ΩΔt))

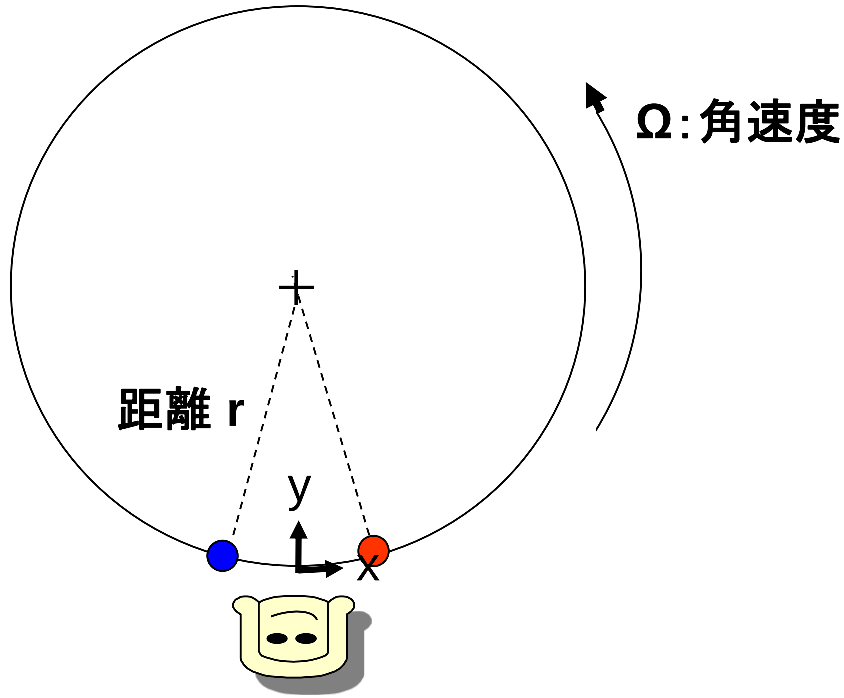
時間 t ～ t+Δtの平均速度:

$$\left[\frac{a\sin\left(\Omega\Delta t\right)-0}{(t+\Delta t)-t},\frac{r+a\cos\left(\Omega\Delta t\right)-r}{(t+\Delta t)-t}\right]$$

⇩

●の点 $$\left[\frac{a\sin\left(\Omega\Delta t\right)}{\Delta t},\frac{a\cos\left(\Omega\Delta t\right)}{\Delta t}\right]$$

回転系における加速度は？



時間 t の平均加速度＝{（t ～ t＋Δt）の平均速度－（t－Δt ～ t）の平均速度}／Δt

$$\left[\frac{2a\sin(\Omega\Delta t)}{(\Delta t)^2}, 0\right] \approx [2\Omega V, 0]$$

$$\sin z = z + O(z^3), \quad if \quad z << 1, \quad a = V\Delta t$$

$O(z^3)$ ＝z^3以上の高次項を持つ

慣性系では一方向に一定の速度で動く物体は加速度運動ではない（Newton第2法則）はずだが、同じ運動を回転系で見ると加速度（＝力）が働いているように見える。この力をコリオリカと呼ぶ。この力は回転系ゆえに発現する見かけの力である。

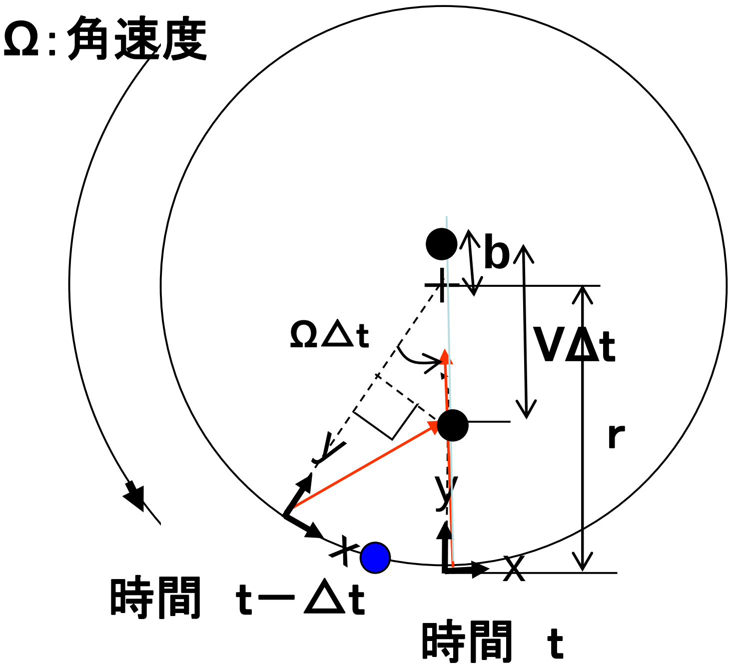
今回の設定

ボールが回転軸を通らない場合
（より一般的な議論）

・ボールは回転軸を通るとするが、時間ｔにおいて回転の中心を通らない一定の速度（V）で動くボールの加速度を求めよう。
・慣性系から見ると、一定の速度で一方向に向かっているのだから、ボールの運動は加速度運動ではない。ところが、回転系ではどうなるか？

回転系における時間tのボールの位置を（0、b）とする。

回転系にいる観測者にとってのボールの
t－Δt ～ t の間の平均速度を求める。



時間 t －Δt :

((VΔt-b) sin (ΩΔt) , r – (VΔt-b) cos (ΩΔt))

時間 t :

(0 , r + b)

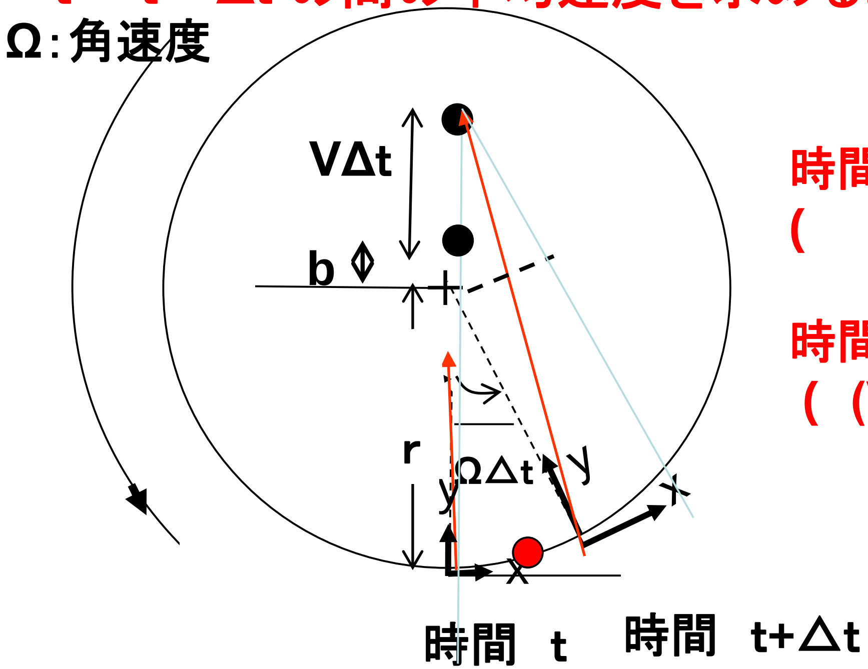
t ～ t－Δtの平均速度:

$$\left[\frac{0-(V\Delta \mathrm{t}-\mathrm{b})\sin\left(\Omega\Delta t\right)}{t-(t-\Delta t)},\frac{b+(V\Delta \mathrm{t}-\mathrm{b})\cos\left(\Omega\Delta t\right)}{t-(t-\Delta t)}\right]$$

● **の点**

$$\left[\frac{-(V\Delta t-\mathrm{b})\sin\left(\Omega\Delta t\right)}{\Delta t},\frac{b+(V\Delta t-\mathrm{b})\cos\left(\Omega\Delta t\right)}{\Delta t}\right]$$

回転系にいる観測者にとってのボールの
t～ t + Δt の間の平均速度を求める。



時間 t :
(0 , r + b)

時間 t +Δt:
((VΔt+b) sin (ΩΔt) , r + (VΔt+b) cos (ΩΔt))

t ～ t+Δtの
平均速度:

$$\left[\frac{(V\Delta \mathrm{t}+\mathrm{b})\sin\left(\Omega\Delta t\right)}{(t+\Delta t)-t},\frac{(V\Delta \mathrm{t}+\mathrm{b})\cos\left(\Omega\Delta t\right)-b}{(t+\Delta t)-t}\right]$$

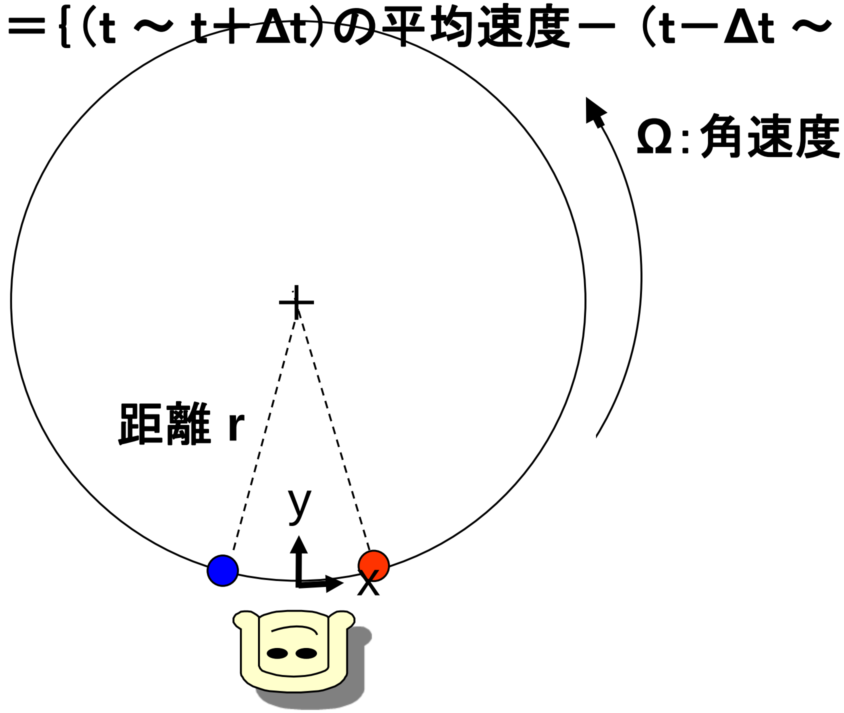
⬇

● の点

$$\left[\frac{(V\Delta t+\mathrm{b})\sin\left(\Omega\Delta t\right)}{\Delta t},\frac{(V\Delta t+\mathrm{b})\ \cos\left(\Omega\Delta t\right)-b}{\Delta t}\right]$$

回転系における加速度は？

時間 t の平均加速度＝{(t ～ t＋Δt)の平均速度－ (t－Δt ～ t)の平均速度}／Δt



$$\left[\frac{2V\Delta t\sin(\Omega\Delta t)}{(\Delta t)^2},\ \frac{-2b\{1-\cos(\Omega\Delta t)\}}{(\Delta t)^2}\right]\Rightarrow\left[2\Omega V,\ -b\Omega^2\right]$$

$$\sin z = z + O(z^3),\quad if\quad z<<1,$$

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2}+O(z^4),\ if\ \ z<<1$$

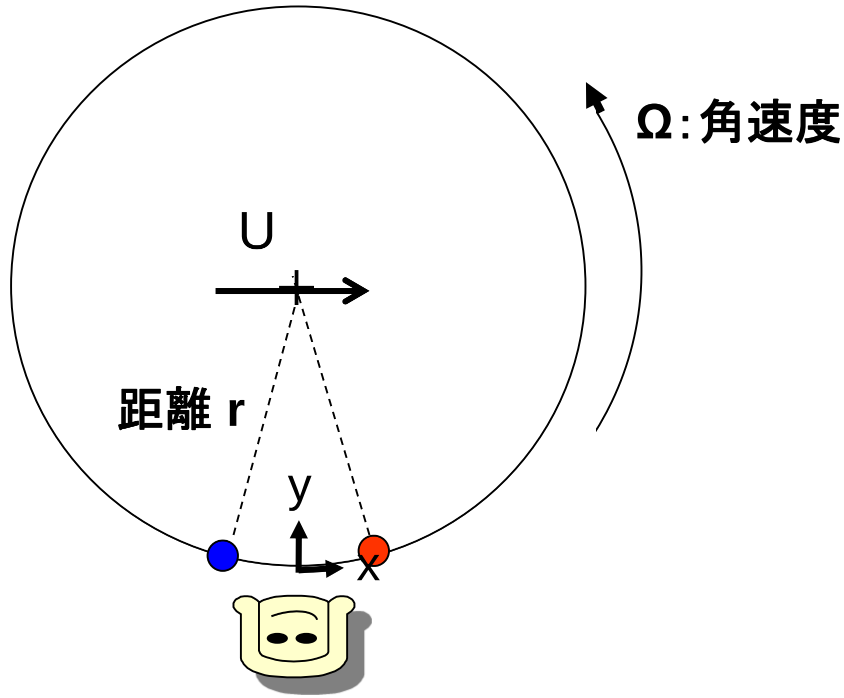
$$\left[\frac{2V\Delta t\sin\left(\Omega\Delta t\right)}{\left(\Delta t\right)^2},\frac{-2b\left\{1-\cos\left(\Omega\Delta t\right)\right\}}{\left(\Delta t\right)^2}\right]\Rightarrow\left[2\Omega V,-b\Omega^2\right]$$

$$\sin z = z + O\left(z^3\right),\quad if\quad z \ll 1,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4),\ if\ \ z \ll 1$$

慣性系ではy方向に一定の速度Vで動くので、加速度運動ではない（Newton第2法則）。回転軸を通るが時間tに回転軸ではない場合、その運動を回転系でみると、x方向では2ΩV、y方向に－bΩ^{2}となる。このうち、x方向はコリオリ力、y方向は遠心力を表し、慣性系とは異なる見かけ上の力が現れる。

同様に、回転の中心を速度(U,0)で動く場合は？



時間 t の平均加速度＝{(t ～ t＋Δt)の平均速度－ (t－Δt ～ t)の平均速度}／Δt
時間tでは回転の中心を通る場合

$$\left[0, -\frac{2U\,\Delta t \sin\left(\Omega \Delta t\right)}{(\Delta t)^2}\right] \Rightarrow \left[0, -2\Omega U\right]$$

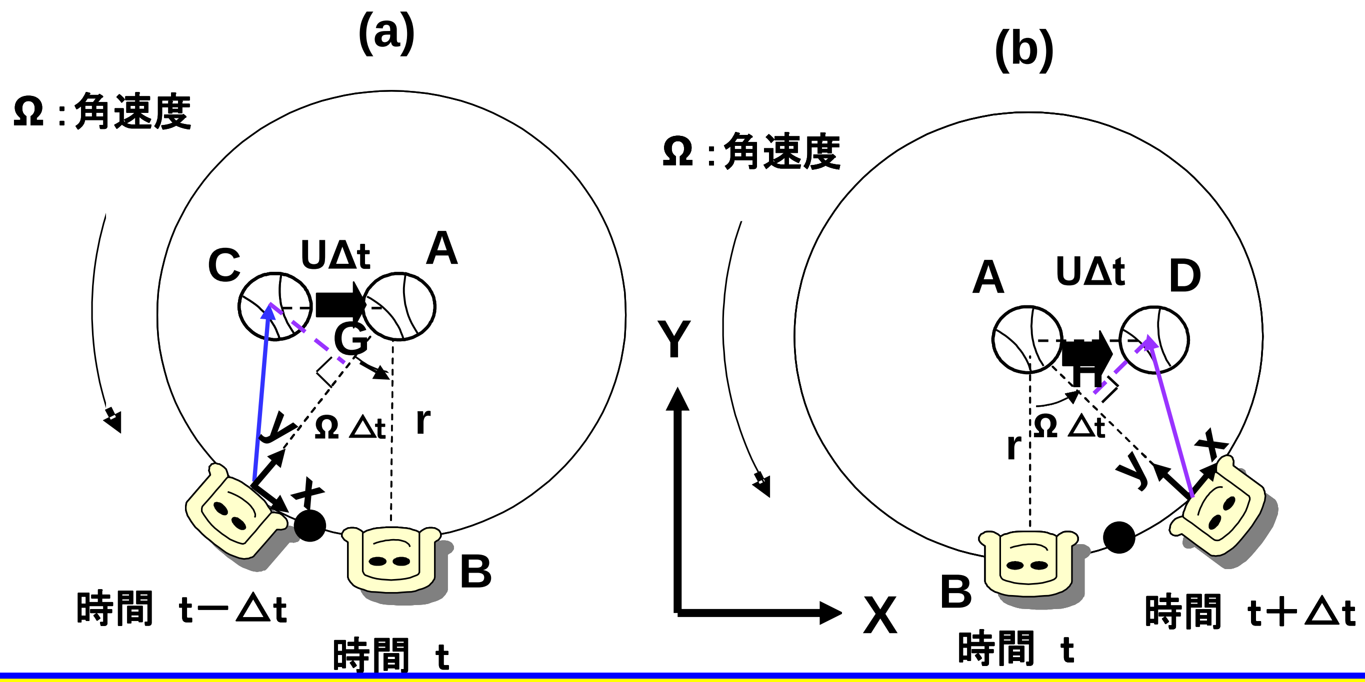
予想

$$\left[-c\Omega^2, -2\Omega U\right]$$

$$\sin z = z + O\left(z^3\right), \quad if \quad z << 1$$

ただし時間 t における回転系における位置は(c、r)とする。rは半径。

今回の宿題　（図はc＝0の場合）



慣性系から見て、一定の速度Uでボールが回転軸の上を通過しない場合を考える。このボールの動きを回転系からみると、どうなるか？回転系で時間tのボールの位置は（c、r）とする。cは任意、rは半径とする。この時の時間t-Δt、t、t+Δtにおけるボールの位置を求め、時間t-Δt/2、t+Δt/2における速度、時間tにおける加速度を求めよ。またΔtを0に近づけた場合の加速度も求めよ。前述の速度Vの場合と比較せよ。

宿題　2013年5月27日（月）12時までに3417室のポストまで投函すること。A4サイズのレポート紙にまとめる。

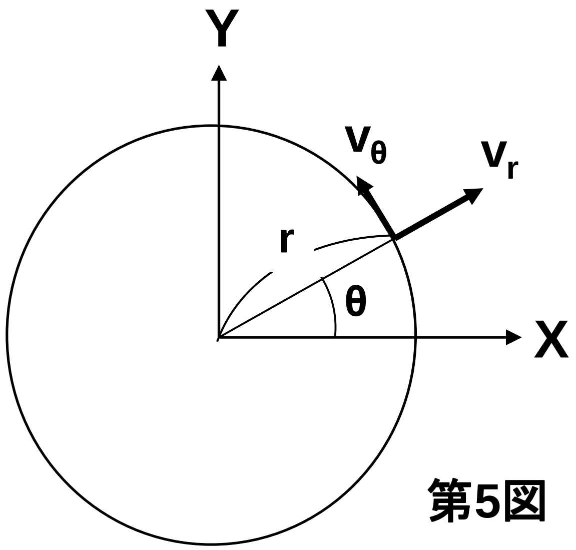
別の視点ー　コリオリ力

● 角運動量保存則などを用いた物理的な見方

流体中の運動を円筒座標系で記述することから始める．第5図のように，半径rと角度θ を定義してそれぞれの方向の速度成分をv_rとv_θ とすると，運動方程式は

$$\dot{v}_r - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad (12)$$

$$\dot{v}_\theta + \frac{v_r \, v_\theta}{r} = -\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \qquad (13)$$



第5図

と書くことができる．φ は圧力を密度で割った量であるが，ここでは簡単のために圧力と呼ぶ．v_rとv_θ の上につけたドットは時間変化を表す。

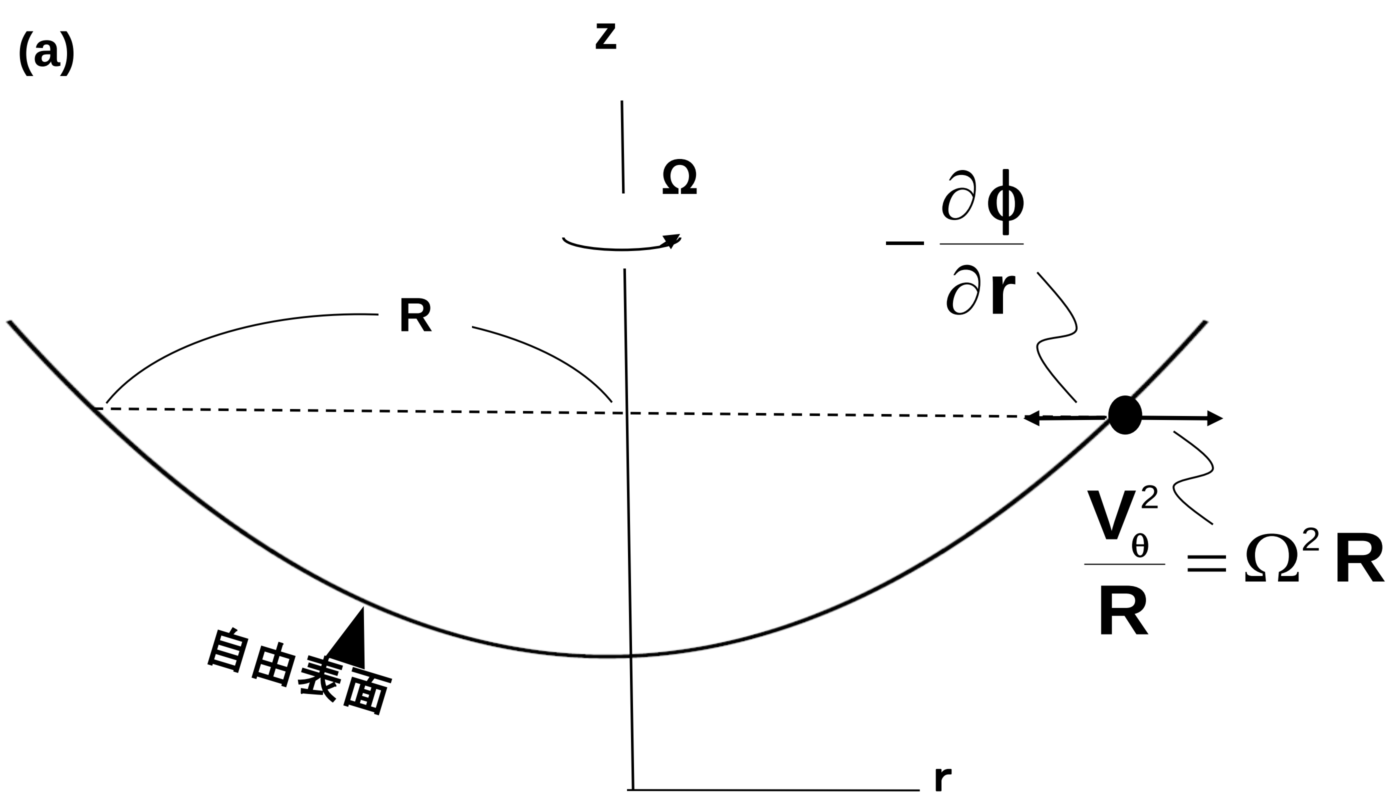
時間項を含まない基本場の量を大文字で
($V_\theta(r)$, $\Phi(r)$)と表すと, (12)から,

$$\frac{V_\theta^2}{r} - \frac{d\Phi}{dr} = 0 \qquad (14)$$

が得られる. 基本場の等圧面は自由表面(ジオイド面)であり, V_θ の大きさはΦ のr方向の傾きの大きさに比例して決まる.
Φ がrの二次関数の場合, $V_\theta = \Omega r$ となり, Ω は一定の値となる. ここでΩ は角速度にあたる. 等圧面の自由表面と紙面に直交する方向に運動する流体粒子を第6図aに示す.

流体粒子には半径Rでは圧力傾度力と$V_\theta{}^2/R=\Omega^2R$（＝遠心力）が働くが，それらの力は逆向きで同じ大きさなのでトータル0である．こうした中では，θ 方向に流体粒子は等速運動を続けることになる．

第6図



○二つのスカラー量の定義：

・（鉛直）渦度

$$\varsigma = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

・水平発散

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

○本来なら渦度は下記のように三つの成分をもつベクトル量であるが、大規模な運動ではζだけが大きい.

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- 円筒座標系における鉛直渦度の定義

$$\zeta \Rightarrow \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\left(= \frac{\partial r V_\theta}{r \partial r} \right)$$

半径だけに依存する渦度の場合、Φがrの二次関数とすると，$V_\theta = \Omega r$ であり，Ω は一定の値で角速度と呼ばれる。この場合の渦度は

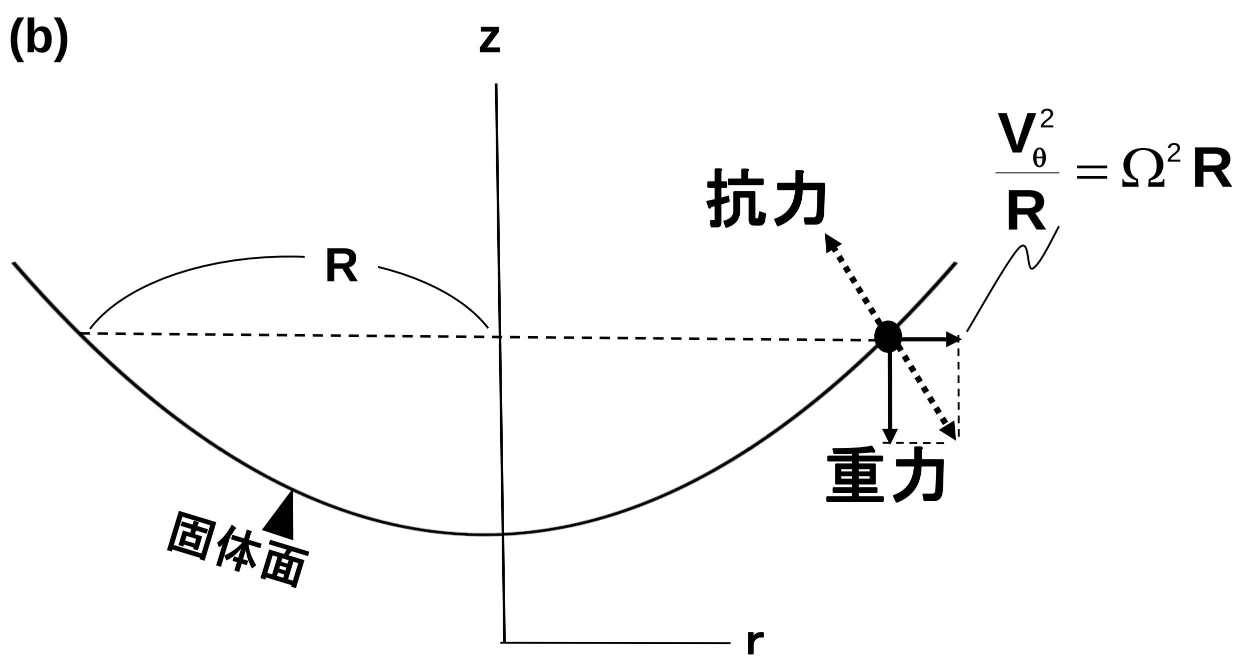
$$\zeta = \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} = \Omega + \Omega = 2\Omega$$

- この系ではどこでも一様な同じ渦度をもつ
- 回転流体はすべての点で一様にスピンしているという同じ特徴を持つ

この状況は，流体粒子から重力場における質点と見方を変えることができる．自由表面はそれと同じ形状を持ち円形の固体面，例えば，競輪場のバンクと考えると，流体粒子は回転軸の周りを一定の速度V_θで疾走する競輪選手に置き換えることができる(第6図b).

競輪選手にかかる力は重力と遠心力の合力であるが，この合力は固体面を通して働く抗力によってバランスする．同じ速度でバンクの上をθ 方向に走っている限り，競輪選手には力は働かない．

第6図



ところが，競輪選手の速度をV_θよりΔv_θだけ速くすると，遠心力がバンクの傾きより大きくなり，半径Rで円周を回っていた競輪選手は外向きに力を感じて大きな円周をとるようになる．(12)のv_rの時間変化を計算すると

$$\dot{v}_r \approx \frac{2V_\theta \Delta v_\theta}{R} = 2\Omega \Delta v_\theta \qquad (15)$$

となる．これはr方向の運動方程式のコリオリ力に相当する．

θ 方向に力が働かない場合には，(13)の右辺は0であり，(13)は$rv_q + v_r v_q = 0$と表せる．$v_r = r$であることから$d/dt(rv_q) = 0$となり，半径Rでは$M = Rv_\theta$ なる物理量が時間に関して一定である．
つまり，Mは保存量であり，これは角運動量と呼ばれる．ひもの一端におもりをつけて回す場合，ひもの長さを徐々に短く(長く)すると，おもりの回転は徐々に速く(遅く)なる（小倉 1999）．
このとき，ひもの長さを変えるのはr方向でありθ 方向には力は働かないので，角運動量保存は成り立つ．ここで，Mを保存しながら半径RをΔ Rだけ変えてみる．そのときV_θ もΔ v_θ だけ変わるとして2次以上の微少量を無視すると，$\Delta v_\theta = -2\Omega \Delta R$が得られる．これをΔ tで割り，Δ tを無限小にすると，

$$\frac{\Delta \mathbf{v}_\theta}{\Delta \mathbf{t}} = -2\Omega \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta \mathbf{t}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{v}}_\theta = -2\Omega \mathbf{v}_r \qquad (16)$$

が得られる．これはθ 方向の運動方程式のコリオリ力に相当する．

こうして得られるコリオリ力は，その働く方向は水平速度ベクトルの方向に直角であり，北(南)半球では右(左)の方向に向く. またこれは座標系の変形から生じた見かけの力であるから，運動エネルギーとしては寄与しない.
運動した時だけに現れるコリオリ力が直感と異なると思うのは，地球が自転するためにもともと傾いている自由表面を回転がないときの水平面と勘違いしたためである（木村 1979).