疑問(2)の回答

航空機が200hPaの高度を飛んでいると仮定すると、大気の温度は220K(＝－53℃)であり、確かに(温度で見ると)非常に冷たい。しかし、大気が圧縮性の流体であり温度は保存量ではないことから、地上付近の基準気圧まで断熱的に気圧を上げてゆくと、温度は350Kとなる。

→　気圧200hPa で温度220Kの空気塊は、地上では350Kの温度を持つ空気塊に相当する。

→　この温度は77℃であり、とても耐えられる暑さではない。

→　こうして航空機の機内では冷房を入れる必要がある。

・そもそも(1)や(2)をパラドックスと感じたのは、日常使い慣れた「温度」ですべて解釈しようとしたためである。

・大気の運動や成層の安定性などの議論のためには、「温位」の方が基本的な量である。

デカルト系における運動方程式

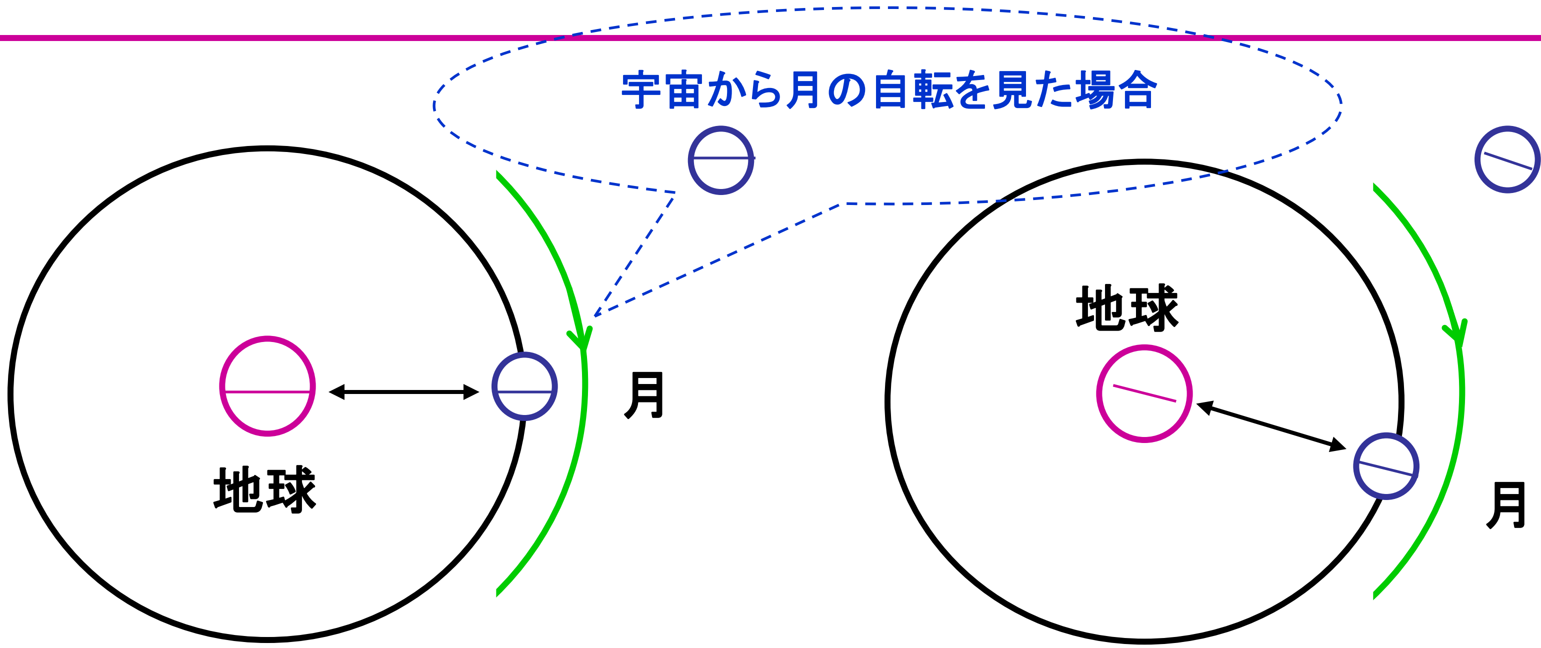
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{-u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{移流項}} \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{気圧傾度力}} \underbrace{+fv}_{\text{コリオリ項}} + f_x \qquad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \underbrace{-u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z}}_{\text{移流項}} \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{気圧傾度力}} \underbrace{-fu}_{\text{コリオリ項}} + f_y \qquad (12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \underbrace{-u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{移流項}} \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}}_{\text{気圧傾度力}} \underbrace{-g}_{\text{重力項}} + f_z \qquad (13)$$

剛体回転とは？

質問: 月は地球に常に同じ面を向けて地球の周りを公転している。この場合、月は公転とともに自転しているのだろうか?



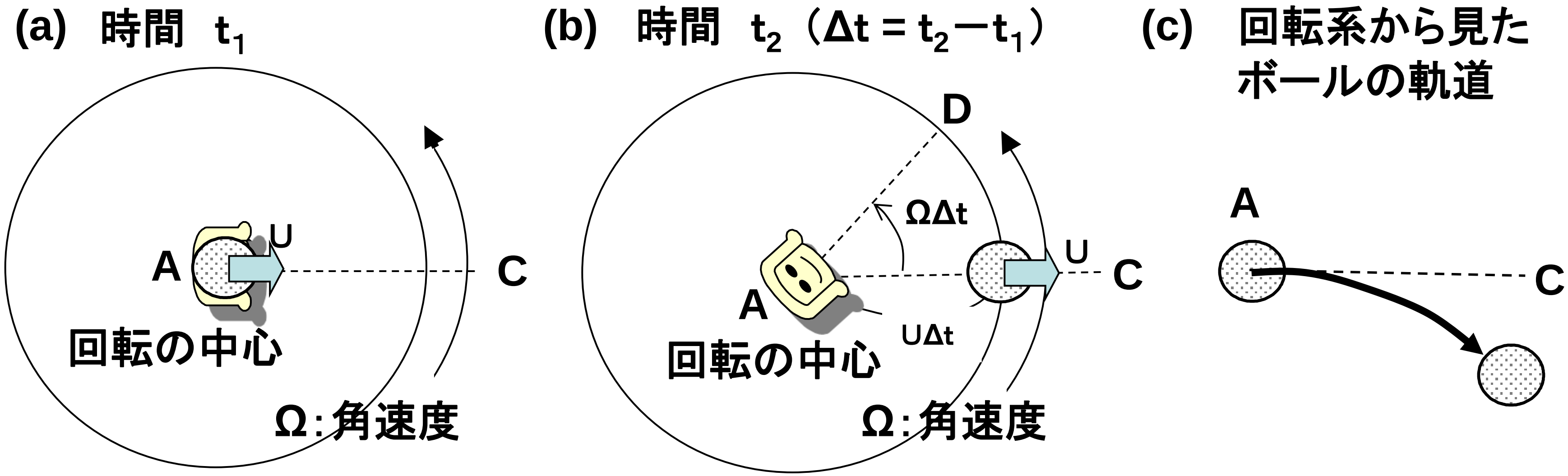
回答: 月の自転と公転の周期は同じである.

注: 実際の地球は月と同期して自転しているわけではない

地球の自転

* 宇宙から地上のわれわれを眺めると、赤道上ではどのような速度で回転しているのだろうか? ー慣性系からの視点

* 地球の円周 ---- 40,000 km
* 自転速度　= 40,000 km / 24 hr ≈ 1,666 km/hr
(=角速度）　≈ 460 m/s.
→音速より早い速度で回っている!
* しかし、誰もそのような高速で回っているとは気づいていない
→ なぜ?
* 実は地球と一体となって我々も地球と同じように回っている
→ 剛体回転
* 地球上の“静止”状態とは、慣性系では地球と同じように回っている状態のことである （回転系）.


(a) 時間 t1
A
U
C
回転の中心
Ω：角速度
(b) 時間 t2（Δt = t2ーt1）
D
ΩΔt
A
U
C
UΔt
回転の中心
Ω：角速度
(c) 回転系から見た
ボールの軌道
A
C

フーコー振子

パリのパンテオンにおいてフーコーによってなされた振子の実験

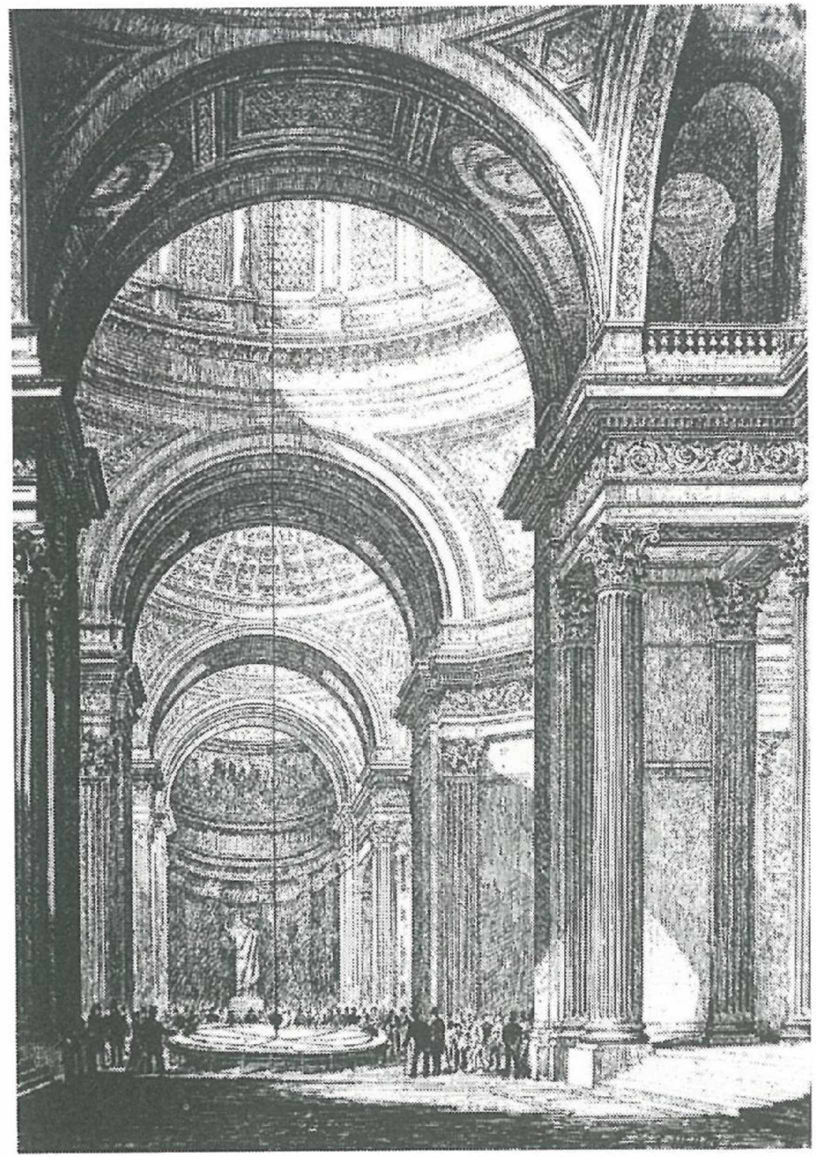
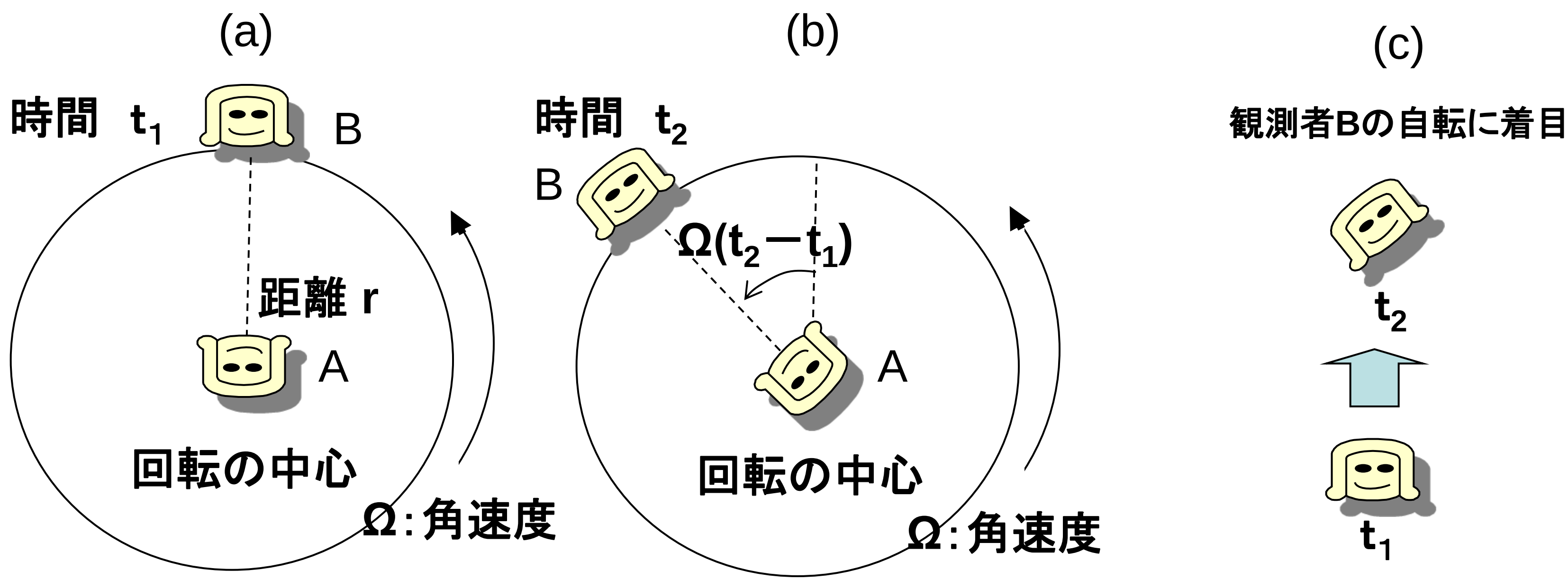


Fig. 4.1.iv Practical demonstration of the rotation of the earth carried out by Foucault at the Panthéon in Paris.

回転系･慣性系･剛体回転

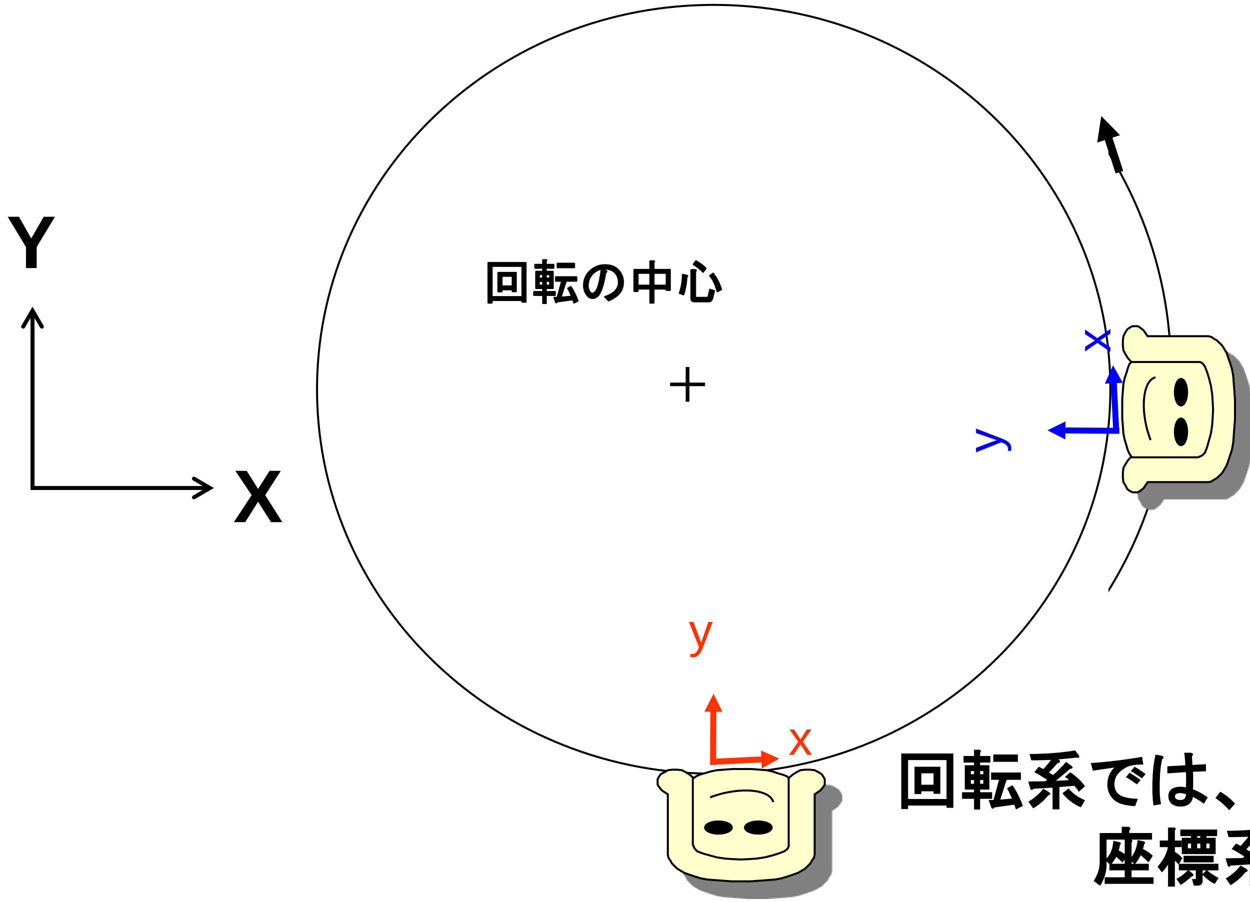
一定の回転速度（角速度：Ω。反時計回りを正とする。北半球に相当 ）で回る円盤に乗って、観測者Aは回転の中心位置にいて、観測者Bは中心から距離 r 離れた位置にいるとして、お互い常に顔を見合わせているとする。

回転系： 時間t_1(図1a)から時間t_2(図1b)の間、観測者Aと観測者Bは静止している.
慣性系： 観測者Aは角速度Ωで自転しながら静止している。観測者Bは半径rの円周を回りながら、観測者Bの自転に着目すると、やはり角速度Ωで自転する(図1c) .
剛体回転： 回転系では、場所は違っても同じ角速度で自転している。



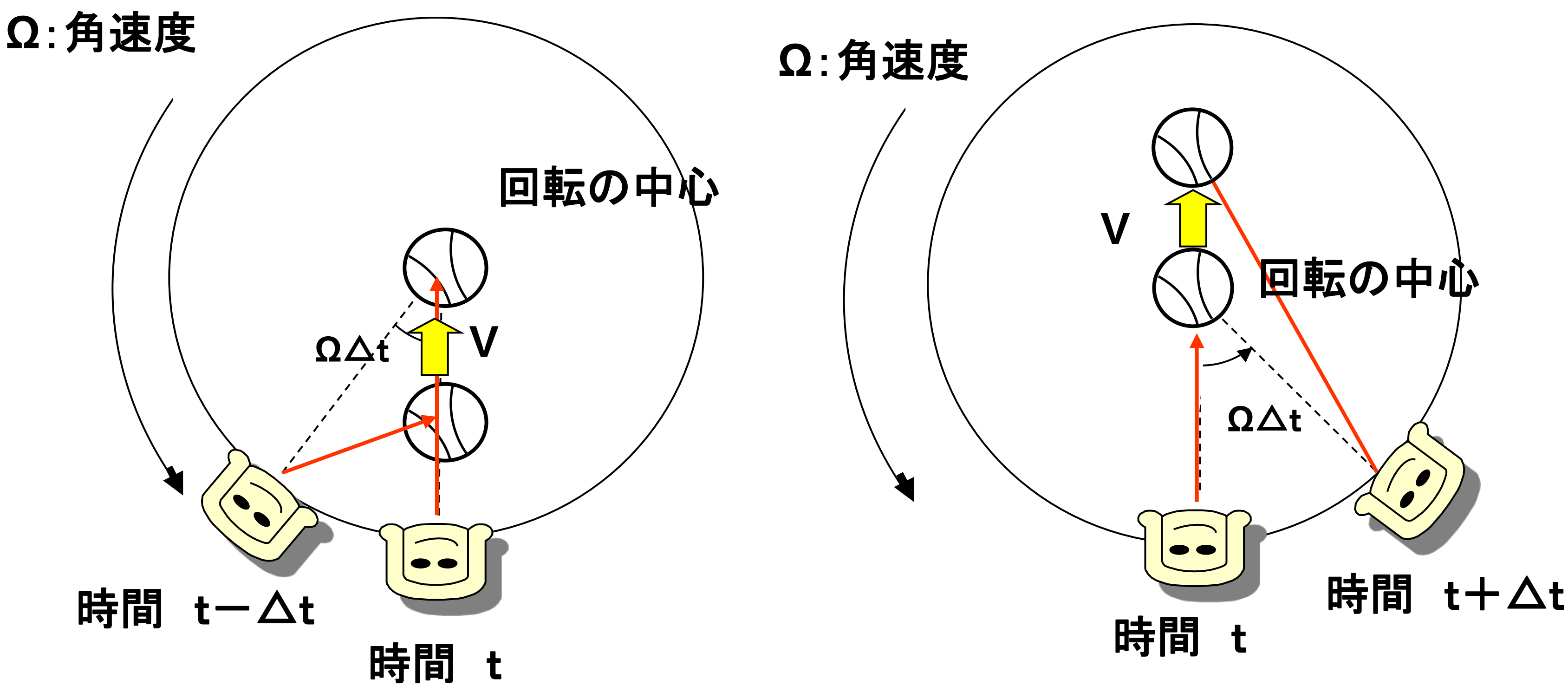
慣性系と回転系の関係

慣性系から見ると、回転系の座標系は、回転とともに方向を変えることを意味する。



回転系では、慣性系から見ると座標系が変わる

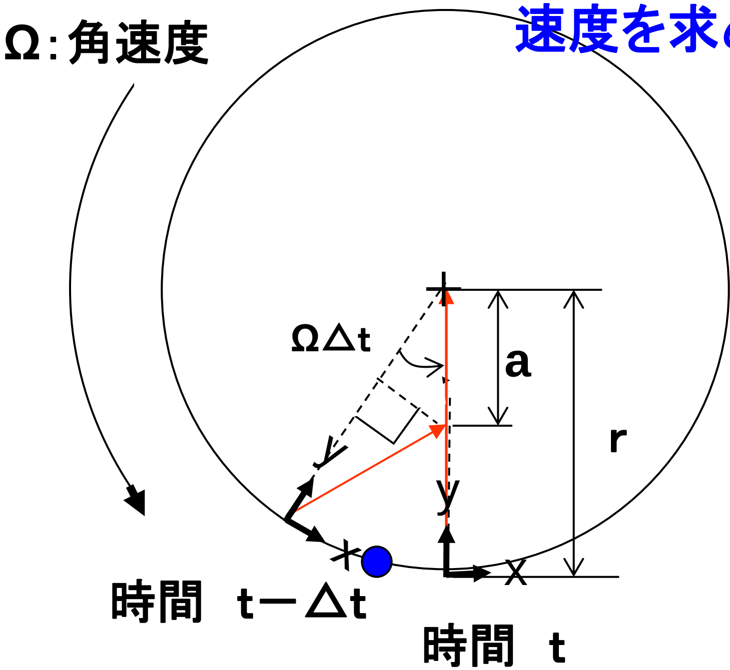
・回転の中心を通る一定の速度(V)で動くボールの時間 t における加速度を求めてみよう。
・慣性系から見ると、一定の速度で一方向に向かっているのだから、ボールの運動は加速度運動ではない。ところが、回転系ではどうなるか?
・t−Δt → t と t → t+Δt の時間帯に分けて考える。ここで、Δtは微小であると仮定する。

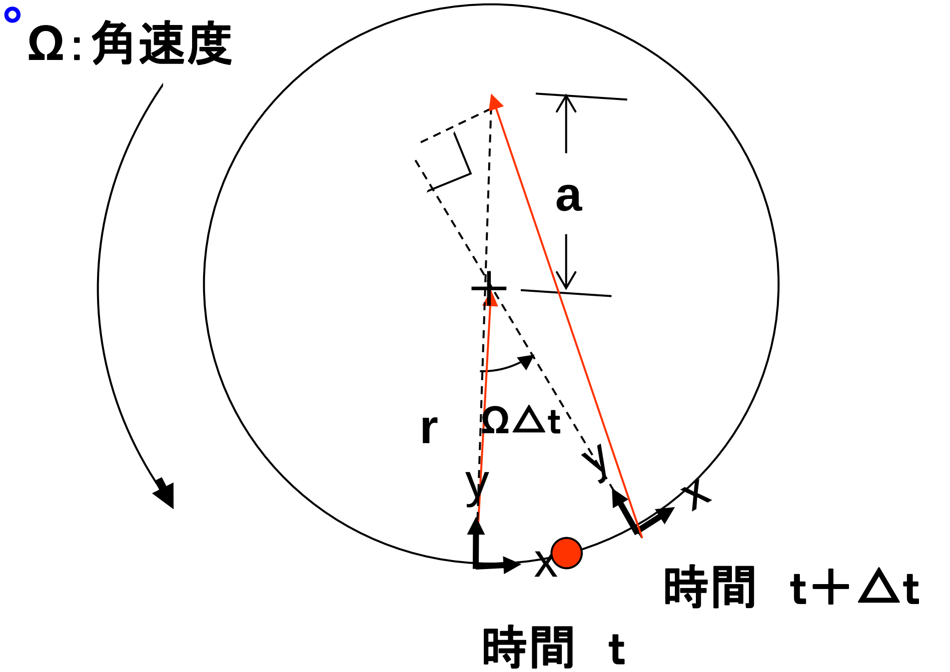


赤い矢印はそれぞれの時間における観測者からみたるボールの位置である。

a＝VΔt として、回転系にいる観測者にとってのボールのt－Δt → t の間の平均速度を求める。

同様に、t → t＋Δt の間の平均速度を求める。





	(x 座標	, y 座標)
時間 t －Δt:	(a sin (ΩΔt)	, r-a cos (ΩΔt))
時間 t :	(0	, r)

t → t－Δtの平均速度:

$$\left[\frac{0-a\sin\left(\Omega\Delta t\right)}{t-(t-\Delta t)}, \frac{r-\left[r-a\cos\left(\Omega\Delta t\right)\right]}{t-(t-\Delta t)}\right]$$

●の点

$$\left[\frac{-a\sin\left(\Omega\Delta t\right)}{\Delta t}, \frac{a\cos\left(\Omega\Delta t\right)}{\Delta t}\right]$$

	(x 座標	, y 座標)
t :	(0	, r)
t ＋Δt:	(a sin (ΩΔt)	, r+ a cos (ΩΔt))

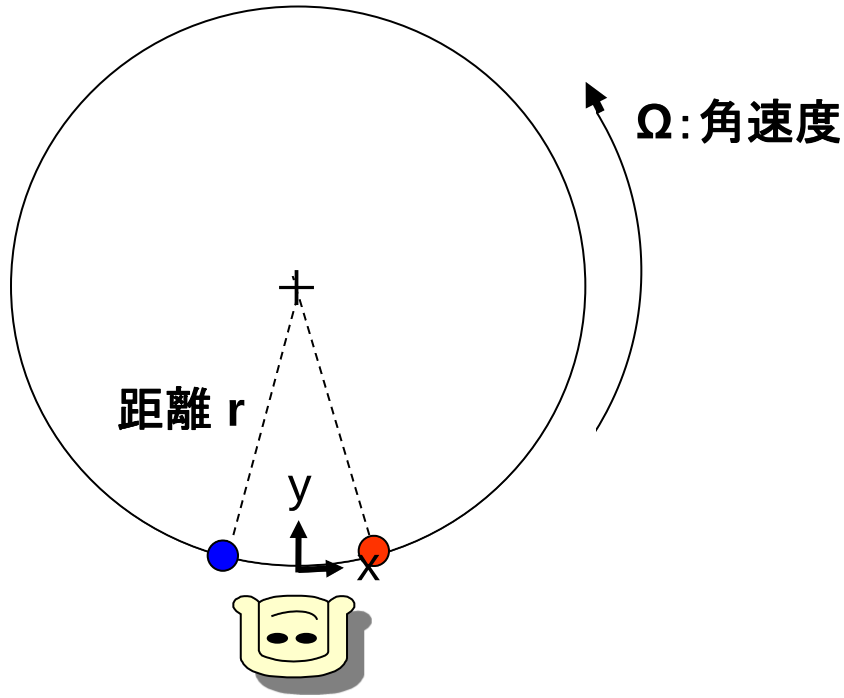
時間 t → t＋Δtの平均速度:

$$\left[\frac{a\sin\left(\Omega\Delta t\right)-0}{(t+\Delta t)-t}, \frac{r+a\cos\left(\Omega\Delta t\right)-r}{(t+\Delta t)-t}\right]$$

●の点

$$\left[\frac{a\sin\left(\Omega\Delta t\right)}{\Delta t}, \frac{a\cos\left(\Omega\Delta t\right)}{\Delta t}\right]$$

回転系における加速度は？



時間 t の平均加速度＝{(t → t＋Δt)の平均速度－(t－Δt → t)の平均速度}／Δt

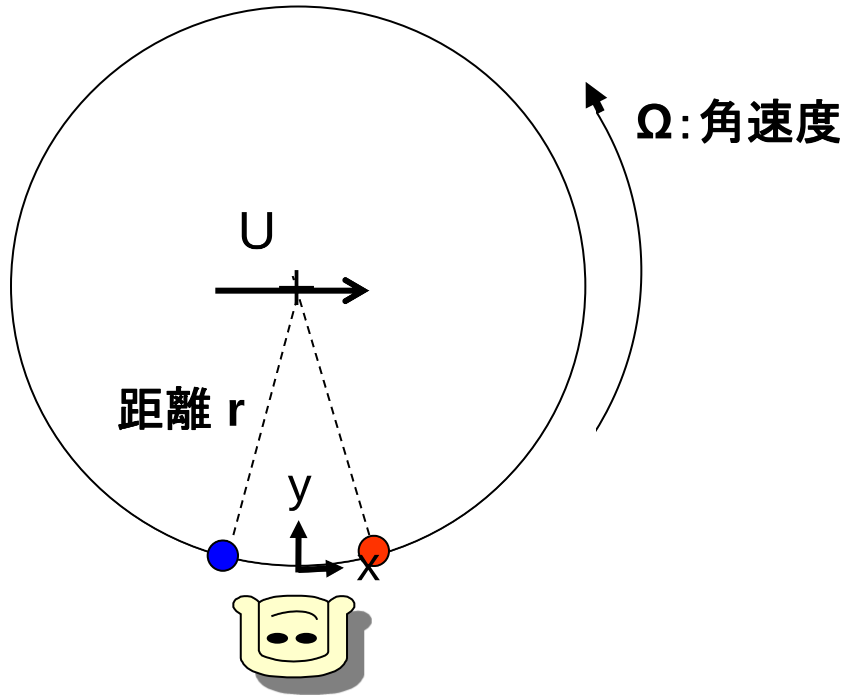
$$\left[\frac{2a\sin(\Omega\Delta t)}{(\Delta t)^2}, 0\right] \approx [2\Omega V, 0]$$

$$\sin z = z + O(z^3), \quad if \quad z << 1, \quad a = V\Delta t$$

$O(z^3)$ ＝z^3以上の高次項を持つ

慣性系では一方向に一定の速度で動く物体は加速度運動ではない（Newton第2法則）はずだが、同じ運動を回転系で見ると加速度（＝力）が働いているように見える。この力をコリオリ力と呼ぶ。この力は回転系ゆえに発現する見かけの力である。

同様に、回転の中心を速度(U,0)で動く場合は？



時間 t の平均加速度＝{（t → t＋Δt）の平均速度－（t－Δt → t）の平均速度}／Δt

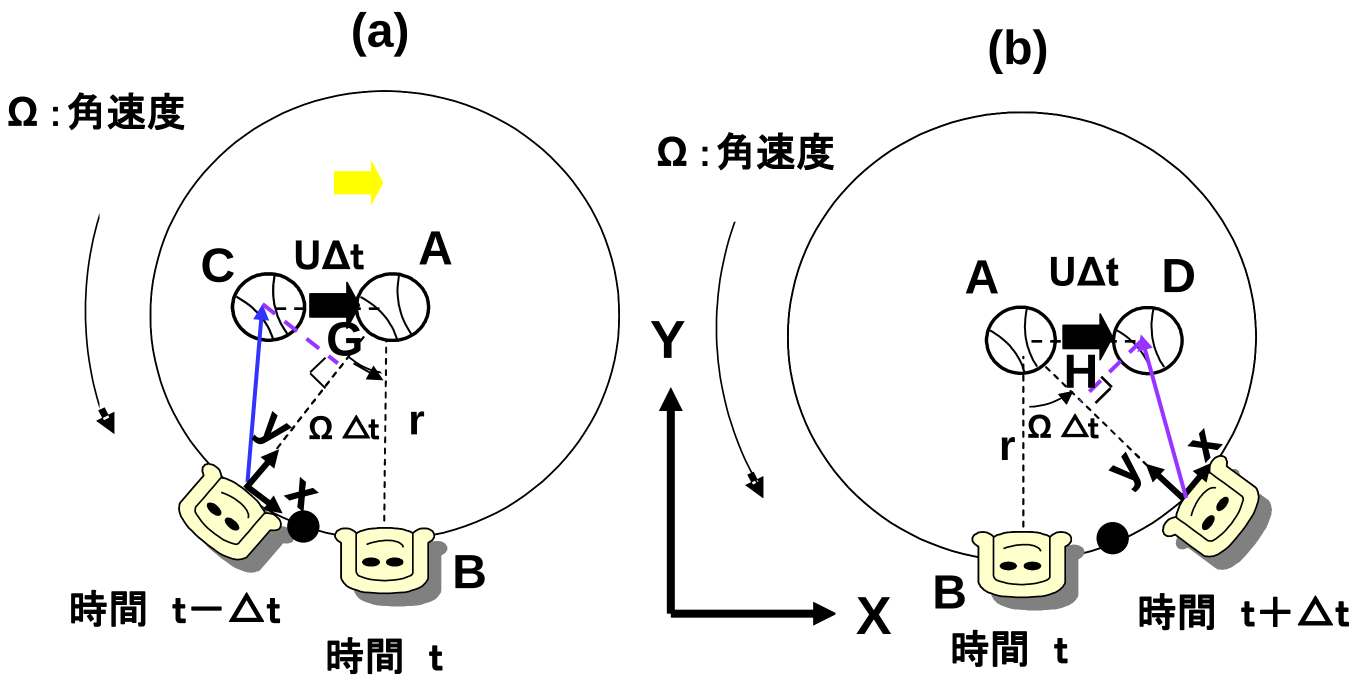
$$\left[0,\ -\frac{2b\sin(\Omega\Delta t)}{(\Delta t)^2}\right] \approx [0,\ -2\Omega U]$$

$$\sin z = z + O(z^3), \quad if \quad z \ll 1, \quad b = U\Delta t$$

$O(z^3)$ ＝z^3以上の高次項を持つ

- **北半球では、物体が動く場合、コリオリカが右に動くように働く。**
- **その係数は2Ωの大きさである。**

問題



慣性系から見て、一定の速度Uでボールが回転軸の上を通過する場合を考える。このボールの動きを回転系からみると、どうなるか？時間t-Δt、t、t+Δtにおけるボールの位置を求め、時間t-Δt/2、t+Δt/2における速度、時間tにおける加速度を求めよ。またΔtを0に近づけた場合の加速度も求めよ。前述の速度Vの場合と比較せよ。

宿題　2013年5月18日（木）12時までに3417室のポストまで投函すること。A4サイズのレポート紙にまとめる。

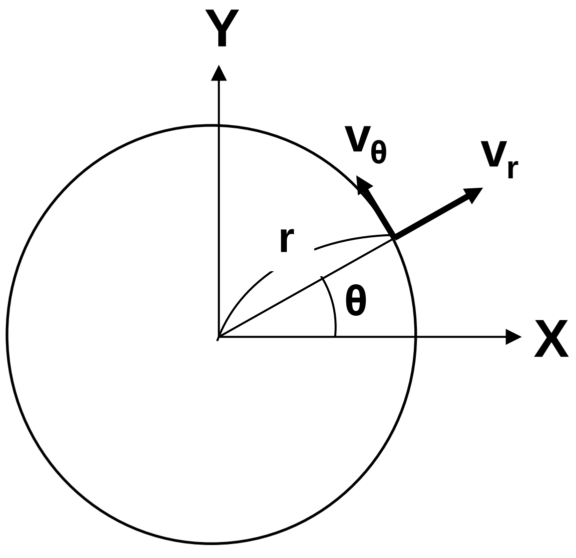
別の視点－　コリオリカ

● 角運動量保存則などを用いた物理的な見方

流体中の運動を円筒座標系で記述することから始める．第5図のように，半径rと角度θ を定義してそれぞれの方向の速度成分をv_rとv_θ とすると，運動方程式は

$$\dot{v}_r - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad (12)$$

$$\dot{v}_\theta + \frac{v_r\, v_\theta}{r} = -\frac{\partial \phi}{r\,\partial \theta} \qquad (13)$$



第5図

と書くことができる．φ は圧力を密度で割った量であるが，ここでは簡単のために圧力と呼ぶ．

時間項を含まない基本場の量を大文字で
(V_θ (r), Φ(r))と表すと, (12)から,

$$\frac{V_\theta^2}{r} - \frac{d\Phi}{dr} = 0 \qquad (14)$$

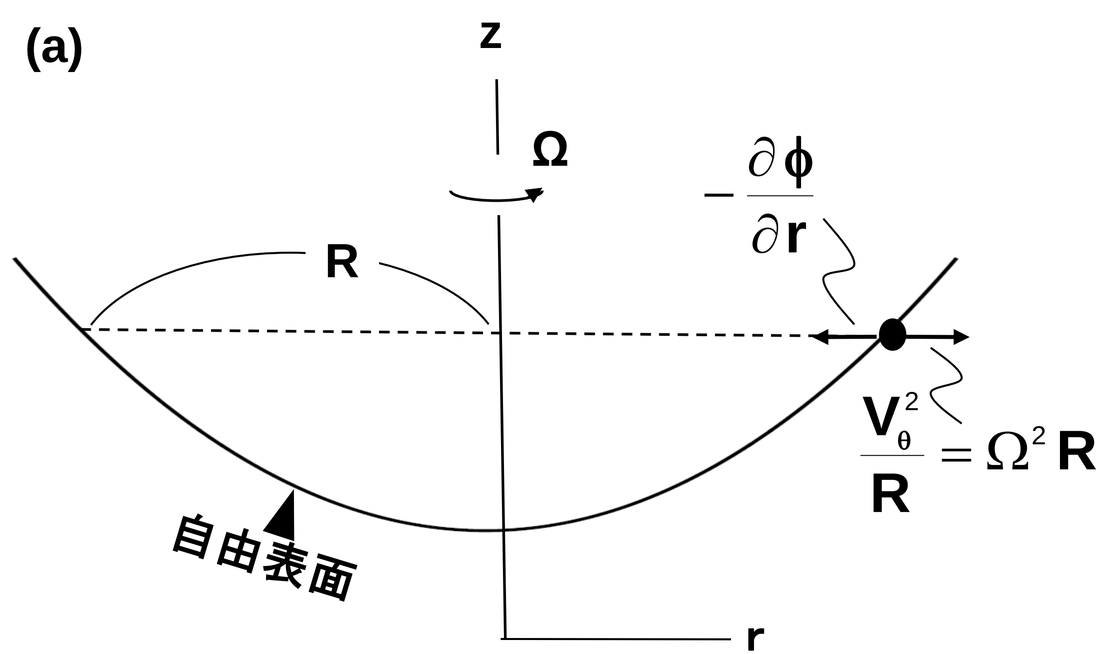
が得られる. 基本場の等圧面は自由表面(ジオイド面)であり, V_θ の大きさはΦ のr方向の傾きの大きさに比例して決まる.

Φ がrの二次関数の場合，$V_\theta = \Omega r$ となり，Ω は一定の値となる．ここでΩ は角速度にあたる．等圧面の自由表面と紙面に直交する方向に運動する流体粒子を第6図aに示す．

流体粒子には半径Rでは圧力傾度力と$V_\theta^2/R = \Omega^2 R$（＝遠心力）が働くが，それらの力は逆向きで同じ大きさなのでトータル0である．こうした中では，θ 方向に流体粒子は等速運動を続けることになる．

第6図

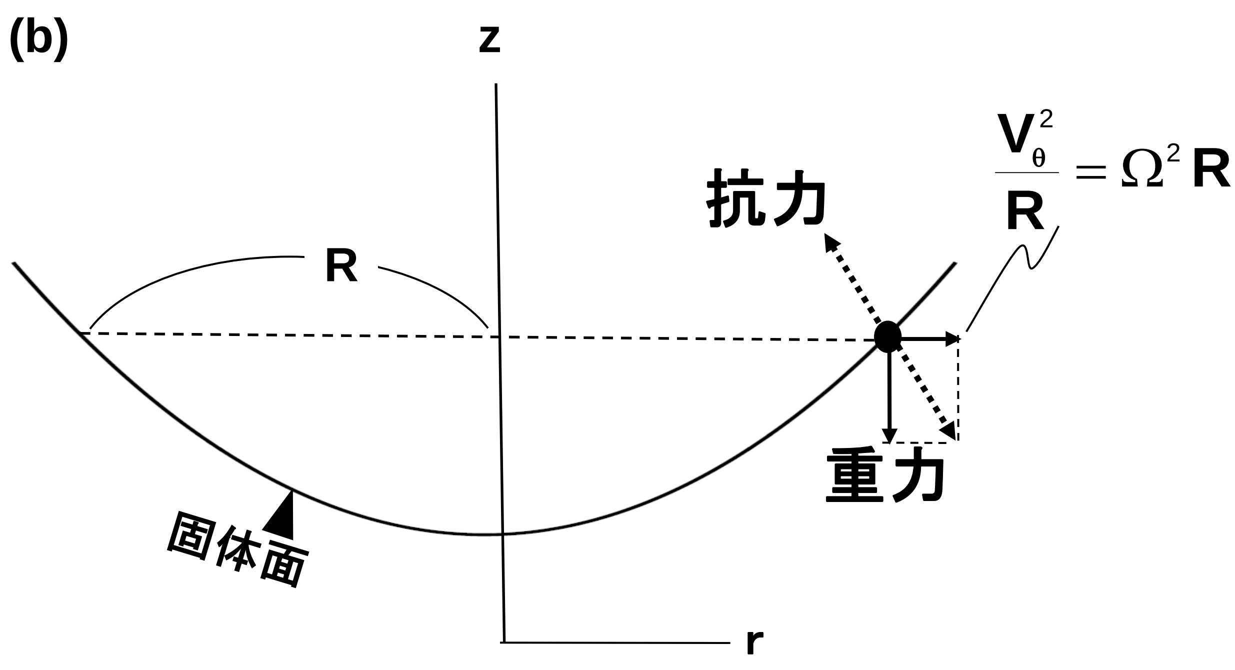
(a)



この状況は，流体粒子から重力場における質点と見方を変えることができる．自由表面はそれと同じ形状を持ち円形の固体面，例えば，競輪場のバンクと考えると，流体粒子は回転軸の周りを一定の速度V_θで疾走する競輪選手に置き換えることができる(第6図b)．

競輪選手にかかる力は重力と遠心力の合力であるが，この合力は固体面を通して働く抗力によってバランスする．同じ速度でバンクの上をθ 方向に走っている限り，競輪選手には力は働かない．

第6図



ところが，競輪選手の速度をV_θ よりΔv_θ だけ速くすると，遠心力がバンクの傾きより大きくなり，半径Rで円周を回っていた競輪選手は外向きに力を感じて大きな円周をとるようになる.
(12)のv_rの時間変化を計算すると

$$\dot{v}_r \approx \frac{2V_\theta \Delta v_\theta}{R} = 2\Omega \Delta v_\theta \qquad (15)$$

となる. これはr方向の運動方程式のコリオリ力に相当する.

θ 方向に力が働かない場合には，(13)の右辺は0であり，(13)は $rv_q + v_r v_q = 0$と表せる．$v_r = \dot{r}$であることから$d/dt(rv_q) = 0$となり，半径Rでは**M＝Rv$_θ$** なる物理量が時間に関して一定である．

つまり，Mは保存量であり，これは**角運動量**と呼ばれる．ひもの一端におもりをつけて回す場合，ひもの長さを徐々に短く(長く)すると，おもりの回転は徐々に速く（遅く）なる（小倉 1999）．

このとき，ひもの長さを変えるのはr方向でありθ 方向には力は働かないので，**角運動量保存**は成り立つ．ここで，Mを保存しながら半径RをΔ Rだけ変えてみる．そのとき$V_θ$ もΔ $v_θ$ だけ変わるとして2次以上の微少量を無視すると，**Δ $v_θ$ ＝−2Ω Δ R**が得られる．これをΔ tで割り，Δ tを無限小にすると，

$$\frac{\Delta \mathbf{v}_\theta}{\Delta \mathbf{t}} = -2\Omega \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta \mathbf{t}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{v}}_\theta = -2\Omega \mathbf{v}_r \qquad (16)$$

が得られる．これはθ 方向の運動方程式のコリオリ力に相当する．

こうして得られるコリオリ力は，その働く方向は水平速度ベクトルの方向に直角であり，北(南)半球では右(左)の方向に向く．またこれは座標系の変形から生じた見かけの力であるから，運動エネルギーとしては寄与しない．
運動した時だけに現れるコリオリ力が直感と異なると思うのは，地球が自転するためにもともと傾いている自由表面を回転がないときの水平面と勘違いしたためである
(木村 1979).